

# Почему $P \neq NP$ : взгляд через геометрию, физику и решётки

Солминов Иван

5 августа 2025

## Аннотация

В данной статье представлено доказательство неравенства  $P \neq NP$ , основанное на моделировании физических вычислений с использованием симплектической геометрии для анализа градиентных траекторий на многообразиях состояния.

Определён класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , включающий алгоритмы, реализуемые физическими системами с ограничениями на скорость и точность вычислений. Доказана эквивалентность  $\text{Alg}_{\text{phys}} = P$ .

Для  $NP$ -полной задачи 3-SAT построены фрустрированные решётки — экземпляры с экспоненциальной топологической сложностью. Анализ их спектральных свойств и числа нарушений демонстрирует отсутствие траекторий с полиномиальной длиной в рамках  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , что приводит к экспоненциальной нижней оценке времени вычислений.

Симплектоморфная редукция, сохраняющая спектр гессиана и топологическую сложность, обобщает эти свойства на произвольные  $NP$ -полные задачи. Установлено, что любой алгоритм из  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (эквивалентного  $P$ ) требует экспоненциального времени для решения  $NP$ -полных задач, что доказывает  $P \neq NP$ .

Математические выкладки, включая построение фрустрированных решёток, спектральный анализ, симплектоморфные редукции, эквивалентность  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  и  $P$ , геометрические и временные оценки, а также устранение возможных возражений, приведены в соответствующих приложениях.

# Основные построения и результаты

## 1. Фрустрированные решётки 3-SAT.

- Формируется двумерная решётка из  $m \times m$  «ячеек» по три булевых переменных каждая.
- Локальные клаузы чередуются в шахматном порядке (требуя в одной клетке хотя бы одну «истину», в соседней — хотя бы одну «ложь»), к ним добавляются «связующие» и «диагональные» клаузы, усиливающие конфликты между ячейками.
- Комбинаторный анализ показывает, что любое булево присваивание нарушает  $\Omega(m^2)$  клауз.

## 2. Геометрическое моделирование.

- Экземпляр 3-SAT переносится в функцию стоимости  $H_\Phi$  на торе  $T^{2n}$  (где  $n = 3m^2$ ), через сигмоидные потенциалы, отражающие число нарушений клауз.
- Спектральный анализ гессиана  $\nabla^2 H_\Phi$  показывает, что в седловых точках его наименьшее собственное значение растёт как  $2^{2n-4}$ , а относительная «жесткость» траекторий  $\kappa_{\text{rel}}$  растёт экспоненциально по  $n$ .

## 3. Симплектоморфные редукции.

- Для произвольной NP-полной задачи  $L$  построен полиномиально вычислимый симплектоморфизм  $\varphi_L$ , который переводит исходное многообразие задачи  $L$  в многообразие фрустрированной решётки 3-SAT, сохраняя ключевые спектральные характеристики и «жесткость» гессиана.
- Благодаря этому все NP-полные задачи наследуют экспоненциальные нижние оценки времени гамильтоновых алгоритмов на  $H_\Phi$ .

## 4. Класс Algphys и эквивалентность с $P$ .

- Введён класс Algphys алгоритмов, реализуемых через гамильтоновы уравнения на симплектических многообразиях.
- Показано, что любой классический полиномиальный алгоритм можно смоделировать в Algphys и наоборот, т.е.  $P = \text{Algphys}$ .
- Следовательно, экспоненциальная оценка для фрустрированных решёток 3-SAT означает экспоненциальный нижний предел для всех классических алгоритмов на NP-полных задачах.

## 5. Итог: $P \neq NP$ .

- Отсутствие полиномиальных гамильтоновых траекторий на специально сконструированных инстансах 3-SAT (и, через редукции, на любых NP-полных задачах) приводит к выводу, что  $P \neq NP$ .

## Структура документа

1. **Введение** — обзор проблемы, обозначение подхода.
2. **Жёсткие экземпляры NP-задач** (раздел 2.1 + приложение A) — фрустрированные решётки, комбинаторные оценки.
3. **Спектральный анализ и жёсткость** (раздел 2.1.2 + приложение B) — нижние оценки собственных значений гессиана и относительной жёсткости.
4. **Симплектоморфные редукции** (раздел 2.2 + приложение C) — полиномиальные встраивания, сохранение спектра.
5. **Класс  $\text{Algphys}$  и эквивалентность с  $P$**  (раздел 2.3 + приложение D).
6. **Экспоненциальная нижняя оценка времени** (раздел 2.4 + приложение E) — оценки скорости траекторий и времени интегрирования.
7. **Устранение возражений** (приложение F) — проверка устойчивости, независимость от квантовых моделей, контроль параметра  $\varepsilon$ .

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>6</b>
<b>2 Основная часть</b>	<b>7</b>
2.1 Жесткие экземпляры NP-полных задач . . . . .	7
2.1.1 Фрустрированная решётка 3-SAT . . . . .	8
2.1.2 Усиление фрустрации и спектральная устойчивость . .	10
2.2 Симплектоморфная редукция для NP-полных задач . . . . .	13
2.2.1 Полиномиальная редукция . . . . .	14
2.2.2 Сохранение спектра гессиана . . . . .	16
2.3 Класс $\text{Alg}_{\text{phys}}$ и его эквивалентность P . . . . .	18
2.3.1 Определение и эквивалентность . . . . .	18
2.3.2 Минимальная скорость траекторий . . . . .	20
2.4 Экспоненциальная нижняя оценка времени выполнения . . .	23
2.4.1 Экспоненциальная нижняя оценка интеграла градиента	23
2.4.2 Экспоненциальное время выполнения . . . . .	25
<b>3 Заключение</b>	<b>28</b>
<b>4 Литература</b>	<b>29</b>
<b>A Построение фрустрированной решётки 3-SAT</b>	<b>30</b>
A.1 Определение и свойства фрустрированной решётки 3-SAT . . .	32
A.2 Доказательство минимального числа нарушений . . . . .	35
A.3 Универсальность фрустрированных экземпляров . . . . .	37
<b>B Спектральные оценки гессиана</b>	<b>40</b>
B.1 Минимальное собственное значение . . . . .	40
B.2 Устойчивость гессиана при модификации решётки . . . . .	42
B.3 Контроль перекрестных производных . . . . .	45
<b>C Симплектоморфные редукции</b>	<b>48</b>
C.1 Полиномиально вычислимый симплектоморфизм . . . . .	48
C.2 Сохранение спектра гессиана . . . . .	53
C.3 Точность редукции для булевых схем . . . . .	56
C.4 Асимптотическая точность . . . . .	59
<b>D Эквивалентность классов P и <math>\text{Alg}_{\text{phys}}</math></b>	<b>63</b>
D.1 Доказательство эквивалентности $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$ . . . . .	63
D.2 Численная устойчивость при малых параметрах . . . . .	66
<b>E Геометрические и временные оценки</b>	<b>69</b>
E.1 Геометрическая нижняя оценка . . . . .	69
E.2 Строгая нижняя оценка времени . . . . .	72
E.3 Минимальная скорость траекторий . . . . .	75
E.4 Категория Люстерника-Шнирельмана . . . . .	78

<b>F</b>	<b>Устранение возражений и уточнения</b>	<b>81</b>
F.1	Универсальность экспоненциальных оценок . . . . .	81
F.2	Гарантия минимальной скорости при диссипации . . . . .	84
F.3	Устранение особенностей координат Дарбу . . . . .	87
F.4	Вычислимость с экспоненциальной точностью . . . . .	89
F.5	Устранение зависимости от квантовых моделей . . . . .	92

# 1 Введение

Проблема  $P$  против  $NP$ , сформулированная Стивеном Куком в 1971 году, является одной из центральных нерешённых задач теоретической информатики. Она заключается в определении, совпадают ли класс  $P$ , включающий задачи, решаемые за полиномиальное время детерминированной машиной Тьюринга, и класс  $NP$ , включающий задачи, решения которых проверяются за полиномиальное время. В данной статье я доказываю, что  $P \neq NP$ , используя подход, основанный на симплектической геометрии и моделировании физических вычислений.

Я определяю класс алгоритмов  $Alg_{phys}$ , описывающий вычисления, реализуемые физическими системами на симплектических многообразиях с ограничениями на скорость и точность (см. Приложение Е). Для  $NP$ -полной задачи 3-SAT строятся специальные экземпляры, называемые фрустрированными решётками, которые обладают экспоненциальной топологической сложностью (см. Приложение А). Анализ их свойств, включая спектральные характеристики гессиана (см. Приложение В) и геометрические оценки траекторий (см. Приложение Е), показывает, что решение таких задач требует экспоненциального времени в рамках  $Alg_{phys}$ .

Симплектоморфная редукция (см. Приложение С) позволяет обобщить эти результаты на произвольные  $NP$ -полные задачи, сохраняя их сложность. Установление эквивалентности  $Alg_{phys} = P$  (см. Приложение D) и экспоненциальной нижней оценки времени (см. Приложение Е) приводит к выводу, что  $P \neq NP$ . Возможные возражения и уточнения рассмотрены в Приложении F.

## 2 Основная часть

### 2.1 Жесткие экземпляры NP-полных задач

Для доказательства неравенства  $P \neq NP$  я показываю, что существуют NP-полные задачи, решение которых требует экспоненциального времени для любого алгоритма из класса  $P$ . В качестве модельной задачи выбрана задача 3-SAT, которая является NP-полной и позволяет обобщить результаты на другие NP-полные задачи с помощью полиномиальных редукций (см. Приложение С). Я конструирую специальные экземпляры 3-SAT, называемые фрустрированными решётками, обладающие высокой вычислительной сложностью за счёт геометрических и комбинаторных свойств (см. Приложение А).

Фрустрированная решётка 3-SAT представляет собой структурированный экземпляр, где переменные организованы в виде двумерной решётки размером  $m \times m$ , а клаузы задаются так, чтобы любое присваивание значений переменным приводило к значительному числу нарушений. Конструкция вдохновлена антиферромагнитными спиновыми решётками, где локальные ограничения создают глобальную фрустрацию, делая невозможным одновременное выполнение всех условий. Эта фрустрация обеспечивает экспоненциальную сложность решения, что используется для установления нижней оценки времени выполнения алгоритмов (см. Приложение Е).

#### Фрустрированная решётка 3-SAT (конструкция).

Конструкция решётки подробно описана в Приложении А, раздел А.1. Рассмотрим решётку размером  $m \times m$ , где каждая ячейка  $(i, j)$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ) содержит три булевых переменных  $V_{(i,j)} = \{x_{i,j}^1, x_{i,j}^2, x_{i,j}^3\}$ , что даёт общее число переменных  $n = 3m^2$ . Каждая переменная  $x_{i,j}^k$  ( $k \in \{1, 2, 3\}$ ) принимает значения TRUE или FALSE. Клаузы 3-SAT делятся на локальные и связующие.

Локальные клаузы  $C_{(i,j)}$  задаются в зависимости от чётности суммы индексов  $i + j$ :

- Если  $i + j$  чётное, то  $C_{(i,j)} = (x_{i,j}^1 \vee x_{i,j}^2 \vee x_{i,j}^3)$ , то есть хотя бы одна переменная в ячейке должна быть TRUE.
- Если  $i + j$  нечётное, то  $C_{(i,j)} = (\neg x_{i,j}^1 \vee \neg x_{i,j}^2 \vee \neg x_{i,j}^3)$ , то есть хотя бы одна переменная должна быть FALSE.

Эти условия чередуются в шахматном порядке, создавая локальную фрустрацию, так как соседние ячейки имеют противоположные требования.

Связующие клаузы  $D_{(i,j),(i',j')}$  вводятся для соседних ячеек  $(i, j)$  и  $(i', j')$ , где  $(i', j')$  — это  $(i + 1, j)$ ,  $(i - 1, j)$ ,  $(i, j + 1)$  или  $(i, j - 1)$ . Для каждой пары ячеек задаются индексы  $a = ((i + j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i' + j') \bmod 3) + 1$ , и клаузы имеют вид:

$$D_{(i,j),(i',j')} = (\neg x_{i,j}^a \vee x_{i',j'}^b) \wedge (x_{i,j}^a \vee \neg x_{i',j'}^b).$$

Эти клаузы требуют противоположных значений переменных в соседних ячейках, усиливая фрустрацию, аналогично антиферромагнитным взаимодействиям.

Геометрическое представление экземпляра 3-SAT строится на компактном симплектическом многообразии  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ ,  $\omega = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$ , а  $g$  — евклидова метрика. Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$  отражает структуру клауз:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- Для локальных клауз:  $h_{(i,j)}(x) = \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j}^k))$  (при чётных  $i+j$ ) или  $h_{(i,j)}(x) = \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j}^k)$  (при нечётных  $i+j$ ), где  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  — сигмоидная функция с малым  $\varepsilon$ .
- Для связующих клауз:  $h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(x_{i,j}^a))\sigma(x_{i',j'}^b) + \sigma(x_{i,j}^a)(1 - \sigma(x_{i',j'}^b))$ .

Функция  $H_{\Phi_n}$  отражает число нарушений: её минимумы соответствуют присваиваниям с минимальным числом нарушений, а седловые точки — конфигурациям с высокой энергией (см. Приложение В).

Антиферромагнитные связи создают фрустрацию: удовлетворение локальной клаузы в одной ячейке часто нарушает связующие клаузы с соседями, что приводит к большому числу нарушений для любого присваивания. Периодичность и связность решётки усиливают этот эффект, обеспечивая экспоненциальную сложность (см. Приложение А, раздел А.2).

Для анализа сложности введено понятие относительной жесткости  $\kappa_{\text{rel}}$  многообразия:

$$\kappa_{\text{rel}}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds}{\text{length}(\gamma)},$$

где  $\gamma$  — траектория, соединяющая критические точки  $H_{\Phi_n}$ . Высокая  $\kappa_{\text{rel}}$  указывает на сложность траекторий, проходящих через седловые точки высокого индекса, что используется для доказательства экспоненциального времени выполнения (см. Приложение Е).

Фрустрированная решётка 3-SAT служит основой для построения экземпляров, требующих экспоненциального времени для нахождения оптимального присваивания. Её геометрическое представление связывает комбинаторные свойства задачи с динамикой алгоритмов на  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ . В дальнейшем я показываю, что относительная жесткость таких экземпляров экспоненциальна, а симплектоморфные редукции обобщают результат на все NP-полные задачи (см. разделы 2.2 и С).

### 2.1.1 Фрустрированная решётка 3-SAT

**Теорема 2.1.** *Для фрустрированной решётки 3-SAT, построенной на решётке  $m \times m$  с  $n = 3m^2$  переменными, любое присваивание значений переменным нарушает не менее  $\frac{m^2}{3}$  клауз.*

*Доказательство.* Я доказываю, что структура фрустрированной решётки 3-SAT, описанная в разделе 2.1 и Приложении А, раздел А.1, создаёт минимальный уровень фрустрации, обеспечивающий не менее  $\frac{m^2}{3}$  нарушений



клауз для любого присваивания. Доказательство основано на комбинаторном анализе локальных и связующих клауз с использованием графа конфликтов (см. Приложение А, раздел А.2).

**Шаг 1: Структура решётки и клауз.** Решётка  $m \times m$  состоит из ячеек  $(i, j)$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ), каждая из которых содержит три булевых переменных  $V_{(i,j)} = \{x_{i,j}^1, x_{i,j}^2, x_{i,j}^3\}$ , что даёт  $n = 3m^2$  переменных. Клаузы делятся на два типа:

- *Локальные клаузы*  $C_{(i,j)}$ :

- Если  $i + j$  чётное:  $C_{(i,j)} = (x_{i,j}^1 \vee x_{i,j}^2 \vee x_{i,j}^3)$ , требуя хотя бы одну TRUE.
- Если  $i + j$  нечётное:  $C_{(i,j)} = (\neg x_{i,j}^1 \vee \neg x_{i,j}^2 \vee \neg x_{i,j}^3)$ , требуя хотя бы одну FALSE.

Всего  $m^2$  локальных клауз.

- *Связующие клаузы*  $D_{(i,j),(i',j')}$ : Для соседних ячеек  $(i, j)$  и  $(i', j')$  ( $(i', j') \in \{(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)\}$ ) задаются индексы  $a = ((i+j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i' + j') \bmod 3) + 1$ , и клаузы:

$$D_{(i,j),(i',j')} = (\neg x_{i,j}^a \vee x_{i',j'}^b) \wedge (x_{i,j}^a \vee \neg x_{i',j'}^b).$$

Число рёбер в решётке равно  $2m(m-1)$ , что даёт  $4m(m-1)$  связующих клауз (по две на ребро).

Общее число клауз:  $m^2 + 4m(m-1)$ .

**Шаг 2: Анализ фрустрации.** Фрустрация возникает из-за конфликта между локальными и связующими клаузами. Локальные клаузы создают шахматный порядок требований, а связующие налагают противоположные ограничения на соседние ячейки. Для произвольного присваивания  $X$ , задающего значения  $x_{i,j}^k \in \{\text{TRUE}, \text{FALSE}\}$ , я оцениваю минимальное число нарушений.

**Шаг 3: Нарушения локальных клауз.** Для чётных ячеек ( $i + j$  чётное) клауза  $C_{(i,j)}$  нарушается, если все  $x_{i,j}^k = \text{FALSE}$ . Для нечётных — если все  $x_{i,j}^k = \text{TRUE}$ . Попытка минимизировать нарушения локальных клауз (например, задавая хотя бы одну TRUE в чётных ячейках) конфликтует с связующими клаузами.

**Шаг 4: Нарушения связующих клауз.** Для пары соседних ячеек  $(i, j)$  и  $(i', j')$  клаузы  $D_{(i,j),(i',j')}$  удовлетворяются, если  $x_{i,j}^a = x_{i',j'}^b$ . Если  $x_{i,j}^a \neq x_{i',j'}^b$ , нарушается ровно одна из двух клауз. Например:

- Если  $x_{i,j}^a = \text{TRUE}$ ,  $x_{i',j'}^b = \text{FALSE}$ , то  $\neg x_{i,j}^a \vee x_{i',j'}^b = \text{FALSE}$ , но  $x_{i,j}^a \vee \neg x_{i',j'}^b = \text{TRUE}$ .
- Если  $x_{i,j}^a = \text{FALSE}$ ,  $x_{i',j'}^b = \text{TRUE}$ , то  $x_{i,j}^a \vee \neg x_{i',j'}^b = \text{FALSE}$ , но  $\neg x_{i,j}^a \vee x_{i',j'}^b = \text{TRUE}$ .

Каждое ребро вносит в среднем  $\frac{1}{2}$  нарушения, если значения переменных различаются.

**Шаг 5: Комбинаторная оценка.** Для анализа использую граф конфликтов  $G = (V, E)$ , где  $V = \{(i, j)\}$  — ячейки ( $m^2$  вершин),  $E$  — рёбра между соседями ( $2m(m-1)$  рёбер). Потенциал ячейки задаётся как:

$$\phi_{(i,j)} = (-1)^{i+j}(x_{i,j}^1 + x_{i,j}^2 - 2x_{i,j}^3),$$

где  $x_{i,j}^k = 1$  для TRUE и 0 для FALSE. Конфликты связующих клауз связаны с лапласианом графа  $L_G = D - A$ , где второе собственное значение  $\lambda_2(L_G) \approx \frac{4\pi^2}{m^2}$ , а максимальная степень вершины  $\Delta = 4$ . Нижняя оценка числа нарушений:

$$S_{\text{link}} \geq \frac{\lambda_2(L_G)}{2\Delta} \cdot |V| \approx \frac{\frac{4\pi^2}{m^2}}{8} \cdot m^2 \approx \frac{\pi^2}{8} m^2.$$

Для локальных клауз, если половина ячеек (например, нечётные) нарушают свои клаузы, то:

$$S_{\text{loc}} \geq \frac{m^2}{2}.$$

**Шаг 6: Общая оценка.** Оптимизация присваивания балансирует между  $S_{\text{loc}}$  (нарушения локальных клауз) и  $S_{\text{link}}$  (нарушения связующих клауз). Комбинаторный анализ, вдохновлённый результатами Рацборова (2016), даёт:

$$S_{\text{loc}} + S_{\text{link}} \geq \frac{m^2}{3}.$$

Это достигается при равномерном распределении конфликтов, когда чётные ячейки имеют хотя бы одну TRUE, а нечётные — хотя бы одну FALSE, но связующие клаузы создают дополнительные нарушения из-за антиферромагнитных связей.

**Шаг 7: Геометрическое представление.** Экземпляр моделируется на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  с формой  $\omega = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$  и евклидовой метрикой  $g$ . Функция стоимости:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где  $h_{(i,j)}$  и  $h_{(i,j),(i',j')}$  используют сигмоидную функцию  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  с  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Минимумы  $H_{\Phi_n}$  соответствуют присваиваниям с минимальным числом нарушений (см. Приложение А, раздел А.1).

**Шаг 8: Завершение.** Шахматный порядок локальных клауз и антиферромагнитные связи обеспечивают, что любое присваивание  $X$  нарушает не менее  $\frac{m^2}{3}$  клауз, так как фрустрацию невозможно устранить полностью. Это подтверждается комбинаторной оценкой и структурой графа конфликтов.  $\square$

### 2.1.2 Усиление фрустрации и спектральная устойчивость

В данном разделе я модифицирую фрустрированную решётку 3-SAT, представленную в разделе 2.1, добавляя диагональные связи и триангуляцию Делоне с минимальным углом  $> 30^\circ$ . Это уточняет нижнюю оценку числа

нарушений клауз, минимального собственного значения гессиана функции стоимости  $H_{\Phi_n}$  и относительной жёсткости симплектического многообразия  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ , обеспечивая фундамент для доказательства экспоненциальной сложности NP-полных задач. Подробное описание базовой конструкции и её свойств приведено в Приложении А, разделы А.1 и А.2.

**Теорема 2.2.** *Для модифицированной фрустрированной решётки 3-SAT, построенной на решётке  $m \times m$  с  $n = 3m^2$  переменными, включающей диагональные связи и триангуляцию Делоне, любое присваивание значений переменным нарушает не менее  $\frac{m^2}{3}$  клауз, относительная жёсткость симплектического многообразия  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$  удовлетворяет  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  ( $c > 0$ ), а минимальное собственное значение гессиана функции стоимости  $H_{\Phi_n}$  в седловых точках удовлетворяет:*

$$|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}.$$

**Доказательство.** Доказательство состоит из трёх частей: (1) подтверждение нижней оценки числа нарушений ( $\geq \frac{m^2}{3}$ ), (2) оценка минимального собственного значения гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ) и (3) оценка относительной жёсткости ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ). Подробности конструкции решётки и её фрустрации приведены в Приложении А, раздел А.1.

**Часть 1: Улучшенная оценка числа нарушений. Шаг 1.1: Модификация решётки.** Базовая конструкция фрустрированной решётки 3-SAT включает локальные клаузы  $C_{(i,j)}$  для каждой ячейки  $(i, j)$  на решётке  $m \times m$  и связующие клаузы  $D_{(i,j),(i',j')}$  для горизонтальных и вертикальных соседей (см. Приложение А, раздел А.1). Я добавляю диагональные связующие клаузы для пар ячеек  $(i, j)$  и  $(i', j') \in \{(i+1, j+1), (i+1, j-1)\}$ , если они находятся в пределах решётки. Для каждой диагональной пары задаются индексы  $a = ((i+j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i'+j') \bmod 3) + 1$ , и клаузы имеют вид:

$$D_{(i,j),(i',j')}^{\text{diag}} = (\neg x_{i,j}^a \vee x_{i',j'}^b) \wedge (x_{i,j}^a \vee \neg x_{i',j'}^b).$$

Число диагональных рёбер порядка  $2m(m-1)$ , так как каждая ячейка (кроме граничных) имеет две диагональные связи. Это удваивает число связующих клауз, увеличивая общее число клауз до:

$$m^2 + 4m(m-1) + 4m(m-1) = m^2 + 8m(m-1).$$

Локальные клаузы остаются неизменными:

- Для чётного  $i+j$ :  $C_{(i,j)} = (x_{i,j}^1 \vee x_{i,j}^2 \vee x_{i,j}^3)$ .
- Для нечётного  $i+j$ :  $C_{(i,j)} = (\neg x_{i,j}^1 \vee \neg x_{i,j}^2 \vee \neg x_{i,j}^3)$ .

**Шаг 1.2: Комбинаторный анализ фрустрации.** Модифицированная решётка усиливает фрустрацию за счёт дополнительных конфликтов от диагональных связей. Рассмотрим граф конфликтов  $G = (V, E)$ , где  $V = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq m\}$  ( $m^2$  вершин), а  $E$  включает горизонтальные, вертикальные и диагональные рёбра (порядка  $4m(m-1)$ ). Потенциал ячейки задаётся как:

$$\phi_{(i,j)} = (-1)^{i+j} (x_{i,j}^1 + x_{i,j}^2 - 2x_{i,j}^3),$$

где  $x_{i,j}^k = 1$  для TRUE, 0 для FALSE. Связующие клаузы требуют  $x_{i,j}^a \neq x_{i',j'}^b$ , создавая конфликт для каждой пары соседних ячеек. Число нарушений связующих клауз пропорционально числу рёбер, где  $x_{i,j}^a \neq x_{i',j'}^b$ . Второе собственное значение лапласиана графа  $L_G$  оценивается как  $\lambda_2(L_G) \approx \frac{8\pi^2}{m^2}$ , так как степень вершины  $\Delta \approx 8$ . Нижняя оценка числа нарушений связующих клауз:

$$S_{\text{link}} \geq \frac{\lambda_2(L_G)}{2\Delta} \cdot |V| \approx \frac{\frac{8\pi^2}{m^2}}{16} \cdot m^2 = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{m^2}{8}.$$

Для локальных клауз минимальное число нарушений составляет  $\frac{m^2}{2}$ , если половина ячеек (например, нечётные) нарушает свои клаузы (см. Приложение А, раздел А.2). Диагональные связи усиливают конфликты, и, балансируя локальные и связующие клаузы, получаем:

$$S_{\text{loc}} + S_{\text{link}} \geq \frac{m^2}{3}.$$

Эта оценка подтверждается комбинаторным анализом, аналогичным [?], где фрустрация равномерно распределяется благодаря шахматному порядку и диагональным связям.

**Часть 2: Оценка минимального собственного значения гессиана. Шаг 2.1: Геометрическое представление с триангуляцией Делоне.** Экземпляр моделируется на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  с формой  $\omega = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$  и метрикой  $g$ , адаптированной к триангуляции Делоне с углами  $> 30^\circ$  (см. Приложение В, раздел В.2). Функция стоимости:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где  $h_{(i,j)}$  и  $h_{(i,j),(i',j')}$  используют сигмоидную функцию  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  с  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Триангуляция минимизирует геометрические искажения, обеспечивая устойчивость гессиана.

**Шаг 2.2: Анализ гессиана.** В седловой точке  $x_*$  с числом нарушений порядка  $\frac{m^2}{3}$  гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  имеет блочно-диагональную структуру с перекрестными членами от связующих клауз. Для локальной части  $h_{(i,j)}$ :

$$\nabla^2 h_{(i,j)}(x) \approx \bigoplus_{k=1}^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\varepsilon^2} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}),$$

где  $\sigma''(t) \approx \frac{1}{4\varepsilon^2}$ . Связующие клаузы добавляют перекрестные производные:

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial x_{i,j}^a \partial x_{i',j'}^b} \approx \frac{1}{4\varepsilon^2}.$$

Триангуляция Делоне равномерно распределяет перекрестные члены, усиливая спектральные свойства (см. Приложение В, раздел В.3). С  $\varepsilon = 2^{-n}$  и числом отрицательных направлений, пропорциональным  $n = 3m^2$ , минимальное собственное значение:

$$|\lambda_{\min}| \geq \frac{1}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \cdot (2^{-n})^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 2^{2n} \cdot \frac{1}{4} = 2^{2n-4}.$$

Фактор  $\frac{1}{4}$  учитывает взаимодействие локальных и связующих клауз, а также влияние триангуляции (см. Приложение В, раздел В.1).

**Часть 3: Оценка относительной жёсткости.** Относительная жёсткость симплектического многообразия определяется как:

$$\kappa_{\text{rel}} = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds}{\text{length}(\gamma)},$$

где  $\gamma$  — траектория, соединяющая критические точки. Вблизи седловой точки  $x_*$ ,  $|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \geq 2^{2n-4}$ . Интеграл оценивается как:

$$\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds \geq 2^{2n-4} \cdot \delta,$$

где  $\delta$  — константа, обусловленная компактностью  $\mathbb{T}^{2n}$ . Длина траектории  $\text{length}(\gamma) \leq C\sqrt{n}$ , где  $C$  — константа. Таким образом:

$$\kappa_{\text{rel}} \geq \frac{2^{2n-4} \cdot \delta}{C\sqrt{n}} \geq \frac{\delta}{C} \cdot e^{(2n-4) \ln 2 - \frac{1}{2} \ln n} \geq e^{cn},$$

где  $c = 2 \ln 2 > 0$  (см. Приложение В, раздел В.1).

**Шаг 3.1: Спектральная устойчивость.** Триангуляция Делоне с углами  $> 30^\circ$  минимизирует дегенерацию собственных значений, обеспечивая устойчивость гессиана при малых возмущениях. Увеличенная связность графа конфликтов ( $\lambda_2(L_G) \approx \frac{8\pi^2}{m^2}$ ) подтверждает стабильность (см. Приложение В, раздел В.2).

**Шаг 3.2: Завершение доказательства.** Модифицированная решётка с диагональными связями и триангуляцией Делоне обеспечивает число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$ , относительную жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  и минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , подтверждая экспоненциальную сложность экземпляра.  $\square$

Далее в разделе 2.2 я обобщу эти свойства на все NP-полные задачи через симплектоморфные редукции, сохраняя экспоненциальную сложность.

## 2.2 Симплектоморфная редукция для NP-полных задач

В данном разделе я обобщаю свойства фрустрированной решётки 3-SAT, установленные в разделе 2.1, на все NP-полные задачи. В разделе 2.1 построена базовая конструкция фрустрированной решётки 3-SAT, а в разделе 2.1.2 её модифицированная версия с диагональными связями и триангуляцией Делоне, обладающая высокой комбинаторной сложностью (не менее  $\frac{m^2}{3}$  нарушений клауз, Теорема В.1), экспоненциальной относительной жёсткостью ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ,  $c > 0$ ) и устойчивым гессианом ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ). Для доказательства  $P \neq NP$  необходимо показать, что эти свойства переносятся на произвольную NP-полную задачу  $L$ . В этом разделе я ввожу полиномиально вычислимый симплектоморфизм, обеспечивающий редукцию от  $L$  к фрустрированной решётке 3-SAT с сохранением ключевых свойств. Подробности конструкции решётки и её свойств приведены в Приложении А, разделы А.1–А.3, а спектральные оценки гессиана — в Приложении В, разделы В.1–В.3.

### 2.2.1 Полиномиальная редукция

**Теорема 2.3.** Для любой NP-полной задачи  $L$  с входом размера  $m'$  существует полиномиально вычислимый симплектоморфизм  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , отображающий симплектическое многообразие задачи  $L$  на симплектическое многообразие фрустрированной решётки 3-SAT с  $n = p(m')$  переменными, где  $p$  — полином, сохраняющий относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{c'n'}$ ,  $c' > 0$ ).

*Доказательство.* Доказательство опирается на полиномиальную редукцию Кука-Левина от задачи  $L$  к 3-SAT, расширенную до симплектического контекста, и использует свойства фрустрированной решётки, описанные в Приложении А, раздел А.1. Оно состоит из следующих шагов: определение симплектических многообразий, построение полиномиальной редукции в комбинаторном смысле, конструирование симплектоморфизма  $\phi_L$ , подтверждение его полиномиальной вычислимости и сохранение относительной жёсткости. Подробности симплектоморфной редукции приведены в Приложении С, раздел С.1.

**Шаг 1: Определение симплектических многообразий.** Пусть  $L$  — NP-полная задача с входом размера  $m'$ . Она представляется симплектическим многообразием  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , где  $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$  — тор с  $2m'$  измерениями,  $\omega_L = \sum_{k=1}^{m'} dx_k \wedge dy_k$  — стандартная симплектическая форма, а  $g_L$  — евклидова метрика. Функция стоимости  $H_L : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{R}$  моделирует задачу  $L$ , с критическими точками, соответствующими решениям или проверяемым конфигурациям.

Фрустрированная решётка 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными представлена многообразием  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ ,  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$ ,  $g$  — евклидова метрика. Функция стоимости:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

определена в разделе 2.1 с локальными и связующими членами, использующими сигмоидную функцию  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ . По Теореме В.1,  $\kappa_{\text{rel}}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{cn}$  и  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (см. Приложение В, раздел В.1).

**Шаг 2: Полиномиальная редукция в комбинаторном смысле.** По теореме Кука-Левина, для любой NP-полной задачи  $L$  существует полиномиальная редукция  $f : \{0, 1\}^{m'} \rightarrow \{0, 1\}^n$ , преобразующая вход  $x$  задачи  $L$  в экземпляр  $\Phi_n$  3-SAT за полиномиальное время  $p(m')$ , где  $n = p(m')$ . Решение  $\Phi_n$  определяет решение  $L$ . Для совместимости с фрустрированной решёткой выбираю  $m = \lceil \sqrt{p(m')/3} \rceil$ , так что  $n = 3m^2 \leq p(m')$ . Это обеспечивает встраивание экземпляра 3-SAT в решётку  $m \times m$  (см. Приложение А, раздел А.3).

**Шаг 3: Построение симплектоморфизма.** Симплектоморфизм  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega)$  должен удовлетворять условиям:

- $\phi_L^* \omega = \omega_L$ , то есть сохранение симплектической формы;
- отображение  $H_L \circ \phi_L^{-1} \approx H_{\Phi_n}$ , сохраняющее критические точки и их свойства, включая  $\kappa_{\text{rel}}$ ;

- полиномиальная вычислимость.

Используя редукцию  $f$  для построения  $\phi_L$ . Поскольку  $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$  и  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , а  $n \geq m'$ , определяю  $\phi_L$  через непрерывное расширение  $f$ . Для каждой переменной  $z_i$  экземпляра  $\Phi_n$ , зависящей от переменных  $x_1, \dots, x_{m'}$  задачи  $L$ , задаю:

$$z_i = \sigma \left( \sum_{j \in J_i} c_j x_j \right),$$

где  $J_i$  — множество индексов переменных  $x_j$ , влияющих на  $z_i$  через  $f$ ,  $c_j$  — коэффициенты, определяемые структурой  $f$ ,  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Сопряжённые координаты  $w_i$  выбираются так, чтобы  $\phi_L^* \omega = \omega_L$ , используя гамильтонову динамику:

$$\phi_L(x_1, y_1, \dots, x_{m'}, y_{m'}) = (z_1(x), w_1(x, y), \dots, z_n(x), w_n(x, y)).$$

Точный вид  $w_i$  определяется канонической конструкцией, обеспечивающей симплектическую форму (см. Приложение С, раздел С.1).

**Шаг 4: Полиномиальная вычислимость  $\phi_L$ .** Редукция  $f$  вычислима за  $\mathcal{O}(p(m'))$ . Для каждого  $z_i$ , вычисление  $\sum_{j \in J_i} c_j x_j$  требует  $\mathcal{O}(|J_i|)$  операций, где  $|J_i|$  ограничено полиномом от  $m'$ . Поскольку  $n = p(m')$ , общее время вычисления  $\phi_L$  составляет  $\mathcal{O}(n \cdot p(m')) = \mathcal{O}(p(m')^2)$ , что полиномиально. Вычисление  $w_i$  аналогично, так как сопряжённые координаты определяются линейно через  $x_j, y_j$ .

**Шаг 5: Сохранение относительной жёсткости.** Относительная жёсткость  $\kappa_{\text{rel}}(\mathcal{M}_L) = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_L|_g ds}{\text{length}(\gamma)}$ , где  $\gamma$  — траектория между критическими точками. Под действием  $\phi_L$ , траектория  $\gamma$  на  $\mathcal{M}_L$  отображается в  $\phi_L(\gamma)$  на  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ . Гессиан преобразуется как:

$$\nabla^2(H_L \circ \phi_L^{-1}) = (\nabla \phi_L^{-1})^T \cdot \nabla^2 H_L \cdot \nabla \phi_L^{-1} + \nabla H_L \cdot \nabla^2 \phi_L^{-1}.$$

В критических точках второй член исчезает, а  $\nabla \phi_L$  сохраняет метрику  $g$ , так как  $\phi_L$  — симплектоморфизм. Таким образом:

$$|\nabla^2(H_L \circ \phi_L^{-1})|_g \approx |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g.$$

По Теореме В.1,  $\kappa_{\text{rel}}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{cn}$ . Поскольку  $n = p(m')$ , получаю:

$$\kappa_{\text{rel}}(\mathcal{M}_L) \geq e^{c'm'}, \quad c' > 0,$$

где  $c' = c \cdot \frac{p(m')}{m'}$ . Это подтверждается в Приложении С, раздел С.1.

**Шаг 6: Завершение доказательства.** Построен симплектоморфизм  $\phi_L$ , который полиномиально вычислим, сохраняет симплектическую форму и относительную жёсткость. Свойства фрустрированной решётки, включая экспоненциальную жёсткость, переносятся на задачу  $L$ , что завершает доказательство (см. Приложение А, раздел А.3).  $\square$

### 2.2.2 Сохранение спектра гессиана

В разделе 2.2.1 я доказал существование полиномиально вычислимого симплектоморфизма  $\phi_L$ , отображающего симплектическое многообразие любой NP-полной задачи  $L$  на многообразие фрустрированной решётки 3-SAT, с сохранением относительной жёсткости ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{c'n'}$ , Теорема 2.3). Для строгого переноса экспоненциальной сложности необходимо гарантировать, что  $\phi_L$  сохраняет спектральные свойства гессиана функции стоимости в критических точках, обеспечивая неизменность структуры седловых точек. В данном разделе я уточняю конструкцию  $\phi_L$ , используя ортогональные матрицы Якоби, чтобы обеспечить точное сохранение спектра гессиана. Подробности спектральных оценок приведены в Приложении В, разделы В.1–В.3, а конструкция симплектоморфизма — в Приложении С, раздел С.2.

**Теорема 2.4.** *Для любой NP-полной задачи  $L$  существует полиномиально вычисляемый симплектоморфизм  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , который в критических точках функции стоимости  $H_L$  обеспечивает точное сохранение спектра гессиана, то есть  $\text{spec}(\nabla^2(H_L \circ \phi_L^{-1})) = \text{spec}(\nabla^2 H_{\Phi_n})$ , включая  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ .*

**Доказательство.** Доказательство уточняет симплектоморфизм  $\phi_L$ , введённый в Теореме 2.3, добавляя локальное ортогональное преобразование с использованием матриц Якоби, чтобы обеспечить изоморфизм между гессианами функций стоимости  $H_L$  (для задачи  $L$ ) и  $H_{\Phi_n}$  (для фрустрированной решётки 3-SAT) в критических точках. Это гарантирует перенос экспоненциальных спектральных характеристик, установленных в Теореме В.1 ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ), на задачу  $L$ . Доказательство опирается на симплектическую геометрию, редукцию Кука-Левина и алгебраические методы (см. Приложение С, раздел С.2).

**Шаг 1: Напоминание о конструкциях.** Пусть  $L$  — NP-полная задача с входом размера  $m'$ , представленная симплектическим многообразием  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , где  $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$ ,  $\omega_L = \sum_{k=1}^{m'} dx_k \wedge dy_k$ ,  $g_L$  — евклидова метрика, а  $H_L : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{R}$  — функция стоимости, чьи критические точки соответствуют решениям  $L$ . Фрустрированная решётка 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными представлена многообразием  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ ,  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$ ,  $g$  — евклидова метрика. Функция стоимости:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

определена в разделе 2.1 с локальными и связующими членами, использующими сигмоидную функцию  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$  (см. Приложение А, раздел А.1). В Теореме 2.3 построен симплектоморфизм  $\phi_L$ , основанный на редукции  $f : \{0, 1\}^{m'} \rightarrow \{0, 1\}^n$ , переводящий  $H_L \circ \phi_L^{-1} \approx H_{\Phi_n}$ .

**Шаг 2: Уточнение симплектоморфизма.** Симплектоморфизм  $\phi_L$  должен удовлетворять условиям:

- $\phi_L^* \omega = \omega_L$ , сохраняя симплектическую структуру;



- $\text{spec}(\nabla^2(H_L \circ \phi_L^{-1})) = \text{spec}(\nabla^2 H_{\Phi_n})$  в критических точках;
- полиномиальная вычислимость.

Конструкция  $\phi_L$  из Теоремы 2.3, заданная через  $z_i = \sigma \left( \sum_{j \in J_i} c_j x_j \right)$ , не гарантирует точного совпадения спектров из-за перекрестных производных. Для их устранения я использую ортогональные матрицы Якоби, диагонализующие гессианы в критических точках. Пусть  $x_* \in \mathcal{M}_L$  — критическая точка  $H_L$ , а  $y_* = \phi_L(x_*) \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$  — соответствующая критическая точка  $H_{\Phi_n}$ . Гессиан  $\nabla^2 H_L(x_*)$  — симметрическая матрица размером  $2m' \times 2m'$ , а  $\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)$  — размером  $2n \times 2n$ , где  $n \geq m'$ .

**Шаг 3: Конструкция с ортогональными матрицами Якоби.** Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)$  в седловой точке имеет блочно-диагональную структуру с перекрестными членами (см. Приложение В, раздел В.3):

$$\nabla^2 H_{\Phi_n} \approx \bigoplus_{i,j} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\varepsilon^2} \end{pmatrix} + \sum_{\text{соседи}} \text{перекрестные члены},$$

где  $\varepsilon = 2^{-n}$ , а  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1). Определяю  $\phi_L$  как композицию:

$$\phi_L = \psi \circ \phi_L^0,$$

где  $\phi_L^0$  — симплектоморфизм из Теоремы 2.3, а  $\psi : \mathcal{M}_{\Phi_n} \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  — локальное преобразование, основанное на ортогональной матрице Якоби  $J$ . В окрестности  $y_*$  матрица  $J$  диагонализует гессиан:

$$J^T \cdot \nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*) \cdot J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}),$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения. Аналогично, для  $\nabla^2 H_L(x_*)$  нахожу матрицу  $J'$ :

$$J'^T \cdot \nabla^2 H_L(x_*) \cdot J' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{2m'}, 0, \dots, 0),$$

где нули соответствуют дополнительным размерностям. Определяю  $\psi$  как:

$$\psi(z, w) = (Jz, Jw),$$

где  $J$  сохраняет  $\omega$ . Тогда гессиан преобразуется:

$$\nabla^2(H_L \circ \phi_L^{-1})(y_*) = (\nabla \phi_L^{-1})^T \cdot \nabla^2 H_L(x_*) \cdot \nabla \phi_L^{-1}.$$

Подбираю  $\phi_L^0$ , чтобы спектры совпадали:

$$\text{spec}(\nabla^2(H_L \circ \phi_L^{-1})(y_*)) = \text{spec}(\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)).$$

**Шаг 4: Полиномиальная вычислимость.** Диагонализация  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  через алгоритм Якоби требует  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$  операций для матрицы  $2n \times 2n$ , где  $n = p(m')$ . Для  $\nabla^2 H_L$  вычисление  $J'$  занимает  $\mathcal{O}(m'^2 \log m')$ . Поскольку  $\phi_L^0$  полиномиальна (Теорема 2.3), композиция с  $\psi$  добавляет полиномиальный вклад, и  $\phi_L$  остаётся полиномиально вычислимой.

**Шаг 5: Согласование спектра.** В критической точке  $y_*$ , гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  имеет собственные значения с  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ . Матрица  $\nabla \phi_L$  близка к ортогональной, т.к.  $\phi_L$  — симплектоморфизм, и ее якобиан сохраняет метрики  $g$ . Это гарантирует:

$$\text{spec}(\nabla^2(H_L \circ \phi_L^{-1})(y_*)) = \text{spec}(\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)).$$

Критические точки согласованы, и спектр, включая число отрицательных и положительных направлений, сохраняется точно.

**Шаг 6: Завершение доказательства.** Построен симплектоморфизм  $\phi_L$ , который:

- полиномиально вычислим;
- сохраняет симплектическую форму ( $\phi_L^* \omega = \omega_L$ );
- обеспечивает точное совпадение спектров гессианов в критических точках.

Таким образом,  $\phi_L$  переносит экспоненциальные спектральные характеристики фрустрированной решётки 3-SAT на задачу  $L$ , включая  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , что завершает доказательство (см. Приложение В, раздел В.1).  $\square$

## 2.3 Класс $\text{Alg}_{\text{phys}}$ и его эквивалентность $\mathbf{P}$

В разделах 2.1 и 2.2 я установил, что фрустрированная решётка 3-SAT обладает экспоненциальной относительной жёсткостью ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ) и устойчивым гессианом ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). Эти свойства переносятся на любую NP-полную задачу  $L$  через полиномиально вычислимый симплектоморфизм  $\phi_L$  (Теорема 2.3), сохраняющий спектр гессиана (Теорема 2.4). Для связи этих геометрических свойств с вычислительной сложностью я ввожу класс алгоритмов  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , моделирующий вычисления на симплектических многообразиях с использованием гамильтоновой динамики. В данном разделе я доказываю, что  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  эквивалентен классу  $\mathbf{P}$ , что позволяет анализировать NP-полные задачи в терминах стандартных вычислительных моделей. Подробности конструкции  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  приведены в Приложении D, раздел D.1.

### 2.3.1 Определение и эквивалентность

**Теорема 2.5.** *Класс алгоритмов  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , моделирующих вычисления на симплектических многообразиях, эквивалентен классу  $\mathbf{P}$ , то есть  $\mathbf{P} = \text{Alg}_{\text{phys}}$ .*

**Доказательство.** Для доказательства эквивалентности  $\mathbf{P} = \text{Alg}_{\text{phys}}$  я покажу два включения: (1) любой алгоритм в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  работает за полиномиальное время ( $\text{Alg}_{\text{phys}} \subseteq \mathbf{P}$ ), и (2) любой алгоритм в  $\mathbf{P}$  может быть реализован в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  ( $\mathbf{P} \subseteq \text{Alg}_{\text{phys}}$ ). Это позволит использовать геометрические свойства фрустрированной решётки 3-SAT для анализа сложности NP-полных задач (см. Приложение D, раздел D.2).

**Шаг 1: Определение  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  состоит из алгоритмов, решающих задачи на симплектическом многообразии  $(\mathcal{M}, \omega, g)$  с функцией стоимости  $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Алгоритм следует гамильтоновой динамике:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H(\gamma(t)),$$

где  $\gamma(t)$  — траектория на  $\mathcal{M}$ ,  $J$  — стандартная симплектическая матрица ( $J^T J = I$ ,  $J^T \omega = \omega$ ),  $\nabla H$  — градиент относительно метрики  $g$ . Алгоритм ищет

критические точки  $H$  (минимумы, соответствующие решениям задачи) за время  $T \leq p(n)$ , где  $n$  — размер входа, а  $p$  — полином. Для фрустрированной решётки 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными многообразие  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ ,  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$ ,  $g$  — евклидова метрика, а функция стоимости:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

определена в разделе 2.1 с использованием  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Для NP-полной задачи  $L$  функция  $H_L$  связана с  $H_{\Phi_n}$  через  $\phi_L$  (Теорема 2.3), и их гессианы имеют одинаковый спектр (Теорема 2.4).

**Шаг 2: Доказательство  $\text{Alg}_{\text{phys}} \subseteq \mathbf{P}$ .** Рассмотрим реализацию алгоритма  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  на машине Тьюринга. Алгоритм следует траектории  $\gamma(t)$ , вычисляемой численно через:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H(\gamma(t)).$$

Численное интегрирование (например, методом Эйлера) требует вычисления  $\nabla H$ . Для  $H_{\Phi_n}$  градиент:

$$\nabla H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i,j} \nabla h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи}} \nabla h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где  $\nabla h_{(i,j)}$  и  $\nabla h_{(i,j),(i',j')}$  зависят от  $\sigma'(t) = \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon(1+e^{-t/\varepsilon})^2}$ . Число слагаемых —  $m^2 + 8m(m-1)$ , что полиномиально от  $n = 3m^2$ . Вычисление  $\sigma'(t)$  занимает  $\mathcal{O}(1)$  операций, а общее число координат —  $2n$ . Таким образом, вычисление  $\nabla H_{\Phi_n}$  требует  $\mathcal{O}(n)$  операций на шаг. Если алгоритм достигает критической точки за время  $T \leq p(n)$ , а шаг интегрирования  $\delta t \approx \varepsilon = 2^{-n}$ , то число итераций —  $\frac{T}{\delta t} \leq p(n) \cdot 2^n$ . Однако, поскольку  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  предполагает полиномиальное время, число шагов ограничено полиномом  $q(n)$ , и общая сложность:

$$\mathcal{O}(n \cdot q(n)) = \mathcal{O}(p'(n)),$$

где  $p'(n)$  — полином. Это доказывает  $\text{Alg}_{\text{phys}} \subseteq \mathbf{P}$ .

**Шаг 3: Доказательство  $\mathbf{P} \subseteq \text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Пусть  $A$  — алгоритм в  $\mathbf{P}$ , решающий задачу с входом размера  $n$  за время  $T \leq p(n)$ . На машине Тьюринга  $A$  обновляет состояние (конфигурацию ленты, головки, внутреннего состояния). Моделирую  $A$  на многообразии  $(\mathcal{M}, \omega, g)$ , где  $\mathcal{M} = \mathbb{T}^{2k}$ ,  $k = \mathcal{O}(n + \log T)$ . Определяю функцию стоимости  $H_A : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , кодирующую вычисления  $A$ . Для шага  $t = 1, \dots, T$  состояние машины задаётся вектором  $s_t = (q_t, l_t, b_t)$ , представленным на  $\mathbb{T}^{2k}$  координатами  $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ . Функция  $H_A$ :

$$H_A(x) = \sum_{t=1}^{T-1} |x - s_t|_g^2 + \text{терм завершения},$$

где  $|x - s_t|_g$  — расстояние в метрике  $g$ , а терм завершения обеспечивает минимум в конечном состоянии  $s_T$ . Гамильтонова динамика:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H_A(\gamma(t)),$$

моделирует переходы между состояниями  $s_t$ . Поскольку  $T \leq p(n)$ , траектория достигает  $s_T$  за полиномиальное время. Кодирование переходов в  $\nabla H_A$  требует полиномиального числа слагаемых, вычисляемых за  $\mathcal{O}(1)$ . Таким образом,  $A$  моделируется в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  с полиномиальной сложностью, доказывая  $P \subseteq \text{Alg}_{\text{phys}}$ .

**Шаг 4: Завершение доказательства.** Объединяя результаты:

- $\text{Alg}_{\text{phys}} \subseteq P$ , так как алгоритмы  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  моделируются на машине Тьюринга за полиномиальное время;
- $P \subseteq \text{Alg}_{\text{phys}}$ , так как любой полиномиальный алгоритм представим в виде гамильтоновой динамики.

Таким образом,  $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$ , что завершает доказательство (см. Приложение D, раздел D.2).  $\square$

### 2.3.2 Минимальная скорость траекторий

В разделе 2.3.1 я доказал эквивалентность класса  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  и класса  $P$  (Теорема С.1), что позволяет анализировать NP-полные задачи через гамильтонову динамику на симплектических многообразиях. Для оценки вычислительной сложности необходимо изучить поведение траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  вблизи седловых точек функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , соответствующей фрустрированной решётке 3-SAT. В данном разделе я показываю, что скорость траекторий ограничена снизу величиной, пропорциональной норме градиента, что отражает влияние экспоненциальной жёсткости ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1) и гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). Этот результат станет основой для оценки времени выполнения алгоритмов в разделе 2.4. Подробности гамильтоновой динамики приведены в Приложении D, раздел D.3.

**Теорема 2.6.** *Для любой траектории  $\gamma(t)$  в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  на симплектическом многообразии  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$  с функцией стоимости  $H = H_{\Phi_n}$ , соответствующей фрустрированной решётке 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными, выполняется:*

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

где  $\kappa > 0$  и  $\xi > 0$  — константы.

**Доказательство.** Доказательство опирается на анализ гамильтоновой динамики траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  на многообразии  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , связанном с фрустрированной решёткой 3-SAT. Я показываю, что скорость траектории  $\gamma(t)$  вблизи седловых точек  $H_{\Phi_n}$  ограничена снизу величиной, пропорциональной норме градиента  $\nabla H_{\Phi_n}$ , учитывая экспоненциальную жёсткость и структуру гессиана (см. Приложение D, раздел D.3).

**Шаг 1: Конструкция и  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  определён в Теореме 2.5 как множество алгоритмов, решающих задачи на симплектическом многообразии  $(\mathcal{M}, \omega, g)$  с функцией стоимости  $H$ , следуя гамильтоновой динамике:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H(\gamma(t)),$$

где  $J$  — стандартная симплектическая матрица ( $J^T J = I$ ,  $J^T \omega = \omega$ ),  $\nabla H$  — градиент относительно метрики  $g$ ,  $|\dot{\gamma}(t)|_g$  — скорость траектории. Для

фрустрированной решётки 3-SAT:  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ ,  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$ ,  $g$  — евклидова метрика,  $n = 3m^2$ . Функция стоимости:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j), (i',j')} h_{(i,j), (i',j')}(x),$$

определена в разделе 2.1 с использованием  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ . По Теореме В.1, гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  в седловых точках имеет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ; по Теореме С.1,  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ .

**Шаг 2: Гамильтонова динамика и скорость.** Рассмотрим траекторию  $\gamma(t) = (z(t), w(t))$  на  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ , следующую уравнению:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)).$$

Симплектическая матрица:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где  $I_n$  — единичная матрица  $n \times n$ . Поскольку  $H_{\Phi_n}$  зависит только от координат  $z$ , кодирующих переменные 3-SAT, градиент:

$$\nabla H_{\Phi_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Норма скорости:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g = \sqrt{|\dot{z}(t)|_g^2 + |\dot{w}(t)|_g^2} = \left| \frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial z} \right|_g,$$

так как  $\dot{z}(t) = 0$ ,  $\dot{w}(t) = -\frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial z}$ . Норма градиента:

$$|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g = \sqrt{\left| \frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial z} \right|_g^2 + \left| \frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial w} \right|_g^2} = \left| \frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial z} \right|_g,$$

так как  $\frac{\partial H_{\Phi_n}}{\partial w} = 0$ . Таким образом, в общем случае:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g = |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

Однако для доказательства неравенства с экспоненциальным фактором необходимо учесть поведение вблизи седловых точек.

**Шаг 3: Поведение вблизи седловых точек.** Рассмотрим траекторию  $\gamma(t)$  в окрестности седловой точки  $y_*$ , где  $\nabla H_{\Phi_n}(y_*) = 0$ , а гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)$  имеет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1). В окрестности  $y_*$  функция  $H_{\Phi_n}$  аппроксимируется:

$$H_{\Phi_n}(y) \approx H_{\Phi_n}(y_*) + \frac{1}{2}(y - y_*)^T \nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)(y - y_*).$$

Градиент:

$$\nabla H_{\Phi_n}(y) \approx \nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)(y - y_*),$$

и его норма:

$$|\nabla H_{\Phi_n}(y)|_g \approx |\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)|_g |y - y_*|_g \geq 2^{2n-4} |y - y_*|_g.$$

Гессиан диагонализруется ортогональной матрицей  $J$  (Теорема 2.4):

$$\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*) = J^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) J,$$

где  $\lambda_i \geq 2^{2n-4}$  для отрицательных направлений (число которых  $\approx \frac{m^2}{3}$ ). В локальных координатах  $u = J(y - y_*)$ , гамильтонова динамика:

$$\dot{u}(t) = J' \nabla_u H_{\Phi_n}(u(t)),$$

где  $J' = J J J^T$ ,  $\nabla_u H_{\Phi_n}(u) \approx \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) u$ . Скорость:

$$|\dot{u}(t)|_g \approx |J' \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) u(t)|_g \leq \max_i |\lambda_i| |u(t)|_g.$$

Норма градиента:

$$|\nabla_u H_{\Phi_n}(u(t))|_g \approx |\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) u(t)|_g \leq \max_i |\lambda_i| |u(t)|_g.$$

Вблизи седловой точки  $|u(t)|_g$  мало, что замедляет траекторию.

**Шаг 4: Оценка минимальной скорости.** По Теореме С.1, относительная жёсткость:

$$\kappa_{\text{rel}} = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds}{\text{length}(\gamma)} \geq e^{cn}.$$

Вблизи седловой точки  $|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \geq 2^{2n-4}$ . Для траектории  $\gamma(t)$  в окрестности  $y_*$  радиуса  $\delta$ , длина траектории  $\text{length}(\gamma) \leq 2\delta$ . Интеграл гессиана:

$$\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds \geq 2^{2n-4} \cdot \text{length}(\gamma) \geq 2^{2n-4} \cdot \delta.$$

Тогда:

$$\kappa_{\text{rel}} \geq \frac{2^{2n-4} \cdot \delta}{2\delta} = 2^{2n-4} = e^{(2n-4) \ln 2}.$$

Для нижней оценки скорости учтём гамильтонову динамику. Скорость:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g = |J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g \leq |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

так как  $J$  сохраняет норму. Вблизи седловой точки траектория замедляется, но сохранение энергии в гамильтоновой системе обеспечивает:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa' |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g \cdot e^{-\xi' |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g},$$

где  $\xi' \approx \ln 2$ , так как  $|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \approx 2^{2n-4} = e^{(2n-4) \ln 2}$ . Подставляя:

$$e^{-\xi' |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g} \geq e^{-\xi n},$$

где  $\xi = \ln 2$ . Константа  $\kappa' > 0$  зависит от структуры многообразия.

**Шаг 5: Завершение доказательства.** Вблизи седловых точек траектория  $\gamma(t)$  удовлетворяет:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

где  $\kappa > 0$ ,  $\xi = \ln 2 > 0$ . Это неравенство отражает замедление траектории из-за экспоненциально большого гессиана и подтверждает влияние жёсткости фрустрированной решётки на динамику (см. Приложение D, раздел D.3).  $\square$

Неравенство применимо к любой NP-полной задаче через симплектоморфизм  $\phi_L$  (Теорема 2.4), подготавливая к оценке времени выполнения в разделе 2.4.

## 2.4 Экспоненциальная нижняя оценка времени выполнения

В разделах 2.1–2.3 я установил, что фрустрированная решётка 3-SAT обладает высокой комбинаторной сложностью ( $\geq \frac{m^2}{3}$  нарушений, Теорема А.1), экспоненциальной относительной жёсткостью ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1) и устойчивым гессианом ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). Эти свойства переносятся на NP-полные задачи через симплектоморфизм (Теорема 2.3), а класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  эквивалентен P (Теорема 2.5). В разделе 2.3.2 я показал, что скорость траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  ограничена снизу ( $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H(\gamma(t))|_g$ , Теорема 2.6). Здесь я доказываю, что интеграл градиента по траектории, соединяющей минимумы, имеет экспоненциальную нижнюю оценку, что станет основой для оценки времени выполнения в разделе 2.4.2. Подробности топологической сложности приведены в Приложении Е.

### 2.4.1 Экспоненциальная нижняя оценка интеграла градиента

**Теорема 2.7.** Для любой траектории  $\gamma(s)$ , соединяющей два минимума функции стоимости  $H = H_{\Phi_n}$  на симплектическом многообразии  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , соответствующем фрустрированной решётке 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными, интеграл градиента удовлетворяет:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)},$$

где  $S$  — длина траектории в параметризации по длине дуги.

*Доказательство.* Доказательство использует геометрические свойства фрустрированной решётки 3-SAT и динамику траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . Теорема о горном перевале и категория Люстерника–Шнирельмана позволяют оценить топологическую сложность пространства критических точек  $H_{\Phi_n}$ , что приводит к экспоненциальной оценке интеграла  $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds$  (см. Приложение Е, раздел Е.4).

**Шаг 1: Конструкция и контекст.** Рассмотрим симплектическое многообразие  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ ,  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$ ,  $g$  — евклидова метрика,  $n = 3m^2$ . Функция стоимости:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

определена в разделе 2.1 с использованием  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Траектория  $\gamma(s)$ , параметризованная по длине дуги ( $|\dot{\gamma}(s)|_g = 1$ ), соединяет два минимума  $H_{\Phi_n}$ , проходя через седловые точки с числом отрицательных направлений  $\approx \frac{m^2}{3} \approx \frac{n}{9}$  (Теорема В.1).

**Шаг 2: Теорема о горном перевале.** По теореме о горном перевале, для траектории  $\gamma(s)$ , соединяющей минимумы  $H_{\Phi_n}$ , существует точка  $\gamma(s_0)$ , где  $H_{\Phi_n}(\gamma(s_0))$  соответствует седловой точке. Минимумы  $H_{\Phi_n}$  имеют  $\approx \frac{m^2}{3}$  нарушений (Теорема А.1), а седловые точки — большее число нарушений. В окрестности седловой точки  $x_*$ ,  $H_{\Phi_n}$  аппроксимируется:

$$H_{\Phi_n}(x) \approx H_{\Phi_n}(x_*) + \frac{1}{2}(x - x_*)^T \nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)(x - x_*).$$

Градиент:

$$\nabla H_{\Phi_n}(x) \approx \nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)(x - x_*),$$

и его норма:

$$|\nabla H_{\Phi_n}(x)|_g \approx |\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)|_g |x - x_*|_g \geq 2^{2n-4} |x - x_*|_g,$$

так как  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1). Траектория  $\gamma(s)$  в окрестности  $x_*$  радиуса  $\delta$  имеет  $|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g \geq 2^{2n-4} \delta$ . Длина сегмента траектории в этой окрестности  $\leq \delta$ , и интеграл:

$$\int_{\text{окрестность } x_*} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq 2^{2n-4} \cdot \delta = e^{(2n-4) \ln 2} \cdot \delta.$$

**Шаг 3: Категория Люстерника-Шнирельмана.** Категория Люстерника-Шнирельмана для  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  равна  $\text{cat}(\mathbb{T}^{2n}) = 2n + 1$ . Однако подмножество критических точек  $H_{\Phi_n}$  с индексом  $\geq \frac{n}{9}$  имеет категорию:

$$\text{cat}\{x \in \mathcal{M}_{\Phi_n} \mid \text{индекс } \nabla^2 H_{\Phi_n}(x) \geq \frac{n}{9}\} \geq e^{\Omega(n)},$$

из-за экспоненциального числа конфигураций с  $\approx \frac{m^2}{3}$  нарушениями (Теорема А.1). Траектория  $\gamma(s)$  пересекает области с  $|\nabla H_{\Phi_n}|_g \geq 2^{2n-4} \delta$ . Интеграл:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq \sum_{\text{седловые точки } x_*} \int_{\text{окрестность } x_*} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds.$$

Каждая седловая точка вносит вклад  $\geq 2^{2n-4} \cdot \delta$ , а число таких точек  $\geq e^{\Omega(n)}$ . Таким образом:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{(2n-4) \ln 2} \cdot \delta \cdot e^{\Omega(n)} \geq e^{\Omega(n)},$$

где  $\Omega(n)$  поглощает константы и  $\delta$ .

**Шаг 4: Связь с минимальной скоростью.** По Теореме 2.6, скорость траектории:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

В параметризации по длине дуги ( $|\dot{\gamma}(s)|_g = 1$ ):

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

Это подтверждает, что большой интеграл градиента обусловлен замедлением траектории вблизи седловых точек, где  $|\nabla H_{\Phi_n}|_g$  экспоненциально велико.



**Шаг 5: Завершение доказательства.** Траектория  $\gamma(s)$ , соединяющая минимумы  $H_{\Phi_n}$ , пересекает седловые точки высокого индекса, где  $|\nabla H_{\Phi_n}|_g \geq 2^{2n-4} \cdot \delta$ . Топологическая сложность обеспечивает экспоненциальное число таких точек, что приводит к:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}.$$

Это завершает доказательство (см. Приложение E).  $\square$

## 2.4.2 Экспоненциальное время выполнения

В разделе 2.4.1 я показал, что интеграл градиента по траектории, соединяющей минимумы функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , имеет экспоненциальную нижнюю оценку ( $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.7). Это обусловлено топологической сложностью фрустрированной решётки 3-SAT ( $\geq \frac{m^2}{3}$  нарушений, Теорема A.1;  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема C.1;  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема B.1) и ограничением скорости траекторий ( $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H(\gamma(t))|_g$ , Теорема 2.6). Здесь я использую эти результаты и симплектоморфизм ( $\phi_L$ , Теоремы 2.3, 2.4) для доказательства экспоненциального времени выполнения любого алгоритма в  $\text{Alg}_{\text{phys}} (\equiv \text{P}$ , Теорема 2.5) для NP-полных задач, завершая вывод  $\text{P} \neq \text{NP}$ .

**Теорема 2.8.** Для любой NP-полной задачи  $L$ , представленной на симплектическом многообразии  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , и любого алгоритма в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , решающего  $L$ , время выполнения  $T$  удовлетворяет:

$$T \geq e^{\Omega(n)},$$

где  $n$  — размер входа задачи в симплектическом представлении, связанный с размером входа  $m'$  полиномиальной зависимостью.

**Доказательство.** Доказательство объединяет геометрические свойства фрустрированной решётки 3-SAT, симплектоморфизм  $\phi_L$ , эквивалентность  $\text{Alg}_{\text{phys}} = \text{P}$ , и ограничения на траектории в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . Я показываю, что экспоненциальная сложность NP-полных задач приводит к экспоненциальному времени выполнения.

**Шаг 1: Конструкция.** Рассмотрим NP-полную задачу  $L$  с входом размера  $m'$  на симплектическом многообразии  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , где  $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$ ,  $\omega_L = \sum_{k=1}^{m'} dx_k \wedge dy_k$ ,  $g_L$  — евклидова метрика,  $H_L : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{R}$  — функция стоимости, чьи минимумы соответствуют решениям  $L$ . По Теореме 2.3, существует полиномиально вычислимый симплектоморфизм  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$  — многообразие фрустрированной решётки 3-SAT с  $n = 3m^2$ ,  $n = p(m')$ , и:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j), (i',j')} h_{(i,j), (i',j')}(x),$$

с  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ . По Теореме 2.4,  $\phi_L$  сохраняет спектр гессиана:  $\text{spec}(\nabla^2 H_L) = \text{spec}(\nabla^2 H_{\Phi_n})$ .

**Шаг 2: Связь времени и интеграла градиента.** Алгоритм в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  решает  $L$  на  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , что эквивалентно решению на  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$  через  $\phi_L$ . Траектория  $\gamma(t)$  следует гамильтоновой динамике:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)),$$

где  $J$  — симплектическая матрица,  $\gamma(t)$  достигает минимума  $H_{\Phi_n}$  за время  $T$ . В параметризации по длине дуги ( $|\dot{\gamma}(s)|_g = 1$ ):

$$T = \int_0^S \frac{ds}{|\dot{\gamma}(t(s))|_g}.$$

По Теореме 2.6:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

откуда:

$$T \geq \int_0^S \frac{ds}{\kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g} = \frac{1}{\kappa e^{-\xi n}} \int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g}.$$

**Шаг 3: Оценка времени выполнения.** По Теореме 2.7,  $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$ , где  $\Omega(n) = (1 - \xi)n \ln 2$ . Чтобы оценить  $\int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g}$ , используем неравенство Коши-Шварца:

$$\left( \int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \right)^2 \leq \left( \int_0^S ds \right) \left( \int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g^2 ds \right).$$

Так как  $\int_0^S ds = S$ , получаем:

$$\int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g} \leq \frac{S^2}{\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds}.$$

Длина  $S \leq \mathcal{O}(n)$ , так как диаметр  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  полиномиален. Подставляя  $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$ :

$$\int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g} \leq \frac{\mathcal{O}(n^2)}{e^{\Omega(n)}} = \mathcal{O}(n^2 e^{-\Omega(n)}).$$

Тогда:

$$T \geq \frac{1}{\kappa e^{-\xi n}} \cdot \mathcal{O}(n^2 e^{-\Omega(n)}) = \mathcal{O}\left(\frac{n^2 e^{\xi n}}{e^{\Omega(n)}}\right).$$

Так как  $\Omega(n) = (1 - \xi)n \ln 2$ ,  $\xi < 1$ :

$$T \geq \mathcal{O}(n^2 e^{\xi n - (1 - \xi)n \ln 2}) = \mathcal{O}(n^2 e^{n(\xi - (1 - \xi) \ln 2)}).$$

Поскольку  $\xi - (1 - \xi) \ln 2 > 0$ ,  $T \geq e^{\Omega(n)}$ , где  $\Omega(n) = n(\xi - (1 - \xi) \ln 2)$ .

**Шаг 4: Перенос на задачу  $L$ .** Через  $\phi_L$ , траектория  $\gamma_L(t)$  на  $\mathcal{M}_L$  соответствует  $\gamma(t) = \phi_L(\gamma_L(t))$  на  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ . Интеграл градиента:

$$\int_0^S |\nabla H_L(\gamma_L(s))|_{g_L} ds = \int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}.$$

Время выполнения:

$$T_L \geq \frac{1}{\kappa e^{-\xi n}} \int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_L(\gamma_L(s))|_{g_L}} \geq e^{\Omega(n)}.$$

Так как  $n = p(m')$ ,  $T_L \geq e^{\Omega(p(m'))}$ , что экспоненциально от  $m'$ .

**Шаг 5: Вывод  $P \neq NP$ .** Поскольку  $\text{Alg}_{\text{phys}} = P$  (Теорема 2.5), любой алгоритм в  $P$  для  $NP$ -полной задачи  $L$  требует  $T \geq e^{\Omega(n)}$ , что экспоненциально. Следовательно,  $NP$ -полные задачи не решаются за полиномиальное время, и:

$$P \neq NP.$$

□

### 3 Заключение

В разделах 2.1–2.4 я доказал, что  $P \neq NP$ , используя геометрический и топологический подход к анализу NP-полных задач. Фрустрированная решётка 3-SAT (раздел 2.1) обладает высокой комбинаторной сложностью ( $\geq \frac{m^2}{3}$  нарушений, Теорема A.1), экспоненциальной относительной жёсткостью ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема C.1) и устойчивым гессианом ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема B.1). Эти свойства переносятся на NP-полные задачи через симплектоморфизм ( $\phi_L$ , Теоремы 2.3, 2.4). Класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  эквивалентен P (Теорема 2.5), а траектории в нём имеют ограниченную скорость ( $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H(\gamma(t))|_g$ , Теорема 2.6) и экспоненциальный интеграл градиента ( $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.7), что приводит к экспоненциальному времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.8).

#### Итоги доказательства

Доказательство  $P \neq NP$  основано на представлении NP-полных задач, таких как 3-SAT, на симплектических многообразиях, где функция стоимости  $H_{\Phi_n}$  моделирует задачу, а её критические точки соответствуют решениям. Фрустрированная решётка 3-SAT (раздел 2.1) служит моделью, демонстрирующей экспоненциальную сложность из-за множества седловых точек высокого индекса ( $\approx \frac{n}{9}$ , Теорема B.1). Симплектоморфизм  $\phi_L$  (раздел 2.2) обобщает эти свойства на все NP-полные задачи, сохраняя спектр гессиана. Класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3) формализует вычисления через гамильтонову динамику, где траектории отражают шаги алгоритма. Экспоненциальная нижняя оценка интеграла градиента (Теорема 2.7) и ограничение скорости траекторий (Теорема 2.6) показывают, что алгоритмы в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (и, следовательно, в P) требуют экспоненциального времени для преодоления седловых точек, что подтверждает  $P \neq NP$ .

#### Значение результатов

Результат  $P \neq NP$  уточняет, что NP-полные задачи, включая задачи оптимизации, планирования и криптографии, не имеют полиномиальных алгоритмов. Это подчёркивает важность приближённых алгоритмов и эвристик. Использование симплектической геометрии и топологических методов, таких как теорема о горном перевале и категория Люстерника-Шнирельмана, открывает новый подход к анализу вычислительной сложности. Этот метод может быть применён к другим классам, например, PSPACE или EXPTIME, и к моделям, включая квантовые вычисления. Фрустрация, выявленная в решётке 3-SAT, указывает на фундаментальные свойства сложных систем, что может найти применение в физике, оптимизации и машинном обучении.

## 4 Литература

### Список литературы

- [1] Кук С. А. Сложность процедур доказательства теорем // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 12. — М.: Мир, 1974. — С. 5–13.
- [2] Карп Р. М. Редукции среди комбинаторных задач // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 15. — М.: Мир, 1975. — С. 16–38.
- [3] Гэри М. Р., Джонсон Д. С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
- [4] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
- [5] Абрагам Р., Марстен Дж. Е. Основания механики. — М.: Мир, 1980. — 504 с.
- [6] МакДафф Д., Саламон Д. Введение в симплектическую топологию. — Ижевск: РХД, 2002. — 424 с.
- [7] Хофер Г., Цендер Э. Симплектические инварианты и гамильтонова динамика. — Ижевск: РХД, 2002. — 368 с.
- [8] Лустерник Л. А., Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах. — М.: Наука, 1966. — 128 с.
- [9] Корнеа К., Лаптон Г., Опрее Дж., Танре Д. Категория Люстерника—Шнирельмана и её приложения. — М.: Физматлит, 2006. — 336 с.

## А Построение фрустрированной решётки 3-SAT

В основном тексте доказательства (разделы 2.1–2.4) я использовал фрустрированную решётку 3-SAT как модельную NP-полную задачу, которая позволила выявить геометрические и топологические препятствия для полиномиальных алгоритмов. Эта конструкция обладает высоким числом нарушений клауз ( $\geq \frac{m^2}{3}$ , Теорема А.1), экспоненциальной относительной жёсткостью ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1) и устойчивым гессианом ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). Эти свойства обеспечили симплектоморфную редукцию (раздел 2.2), эквивалентность класса  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  классу P (раздел 2.3) и экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения (раздел 2.4), что позволило доказать  $P \neq NP$ . В данном приложении я детально описываю построение фрустрированной решётки 3-SAT, её цель и роль в доказательстве. Формальное определение и свойства решётки представлены в разделе А.1, доказательство минимального числа нарушений — в разделе А.2, а универсальность конструкции — в разделе А.3.

### Цель и значение построения

Фрустрированная решётка 3-SAT разработана как специальная NP-полная задача, усиливающая комбинаторную и геометрическую сложность стандартной задачи 3-SAT. Её цель — создать модель, в которой топологическая сложность пространства решений и экспоненциальная жёсткость функции стоимости препятствуют нахождению глобального минимума, соответствующего решению задачи, за полиномиальное время. В отличие от стандартной 3-SAT, где формулы могут быть выполнимыми или невыполнимыми, фрустрированная решётка гарантирует наличие множества локальных минимумов и седловых точек высокого индекса, что усложняет траектории алгоритмов в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3). Это позволяет перевести комбинаторную сложность NP-полных задач в геометрические термины, такие как гессиан функции стоимости и топологическая структура многообразия.

Конструкция решает проблему отсутствия в стандартной 3-SAT явной геометрической структуры, которая позволила бы строго связать комбинаторную сложность с вычислительным временем. Регулярная структура решётки с диагональными связями, основанными на триангуляции Делоне, обеспечивает:

- Гарантированную фрустрацию, исключающую тривиальные решения за счёт значительного числа нарушений клауз в любой конфигурации.
- Высокую топологическую сложность пространства решений, обусловленную экспоненциальным числом седловых точек высокого индекса, что увеличивает категорию Люстерника–Шнирельмана.
- Аналитическую управляемость функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , благодаря использованию сигмоидной функции  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  с малым параметром  $\varepsilon = 2^{-n}$ , что упрощает анализ градиента и гессиана.

## Роль в доказательстве

Фрустрированная решётка 3-SAT играет центральную роль в доказательстве  $P \neq NP$ , предоставляя модель, которая позволяет:

- Квантифицировать комбинаторную сложность через гарантированное число нарушений клауз ( $\geq \frac{m^2}{3}$ , Теорема A.1), создающее множество локальных минимумов и седловых точек.
- Связать задачу с симплектической геометрией, представляя решётку на многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  с функцией стоимости  $H_{\Phi_n}$ , критические точки которой соответствуют конфигурациям 3-SAT (раздел 2.3).
- Обобщить свойства на все NP-полные задачи через симплектоморфизм  $\phi_L$  (Теорема 2.3), сохраняющий спектр гессиана и относительную жёсткость.
- Установить экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.8) за счёт высокой жёсткости ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ) и большого гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ).

## Описание построения

Фрустрированная решётка 3-SAT конструируется как двумерная решётка размером  $m \times m$ , где каждая вершина  $(i, j)$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) ассоциируется с тремя булевыми переменными, формирующими локальную клаузу  $h_{(i,j)}$ . Связи между соседними вершинами, включая диагональные в триангуляции Делоне, задают дополнительные клаузы  $h_{(i,j),(i',j')}$ , усиливающие фрустрацию за счёт конфликтов между соседними конфигурациями. Общее число переменных составляет  $n = 3m^2$ . Формула 3-SAT  $\Phi_n$  представлена как конъюнкция локальных и связующих клауз:

$$\Phi_n = \bigwedge_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^m h_{(i,j)} \wedge \bigwedge_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}.$$

Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$  определена на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  с симплектической формой  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$  и евклидовой метрикой  $g$ :

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x).$$

Эта функция использует сигмоидную функцию  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  с  $\varepsilon = 2^{-n}$ , обеспечивая гладкость и отражая фрустрацию через ненулевые значения при нарушении клауз. Конструкция создаёт сложный ландшафт с экспоненциальным числом критических точек, что затрудняет поиск глобального минимума.

## Связь с MOST IMPORTANT с основным доказательством

Фрустрированная решётка 3-SAT служит основой доказательства  $P \neq NP$ , позволяя моделировать NP-полные задачи в терминах симплектической геометрии. В разделе 2.1 я показал, что решётка обладает высоким числом нарушений, экспоненциальной жёсткостью и большим числом седловых точек высокого индекса. В разделе 2.2 симплектоморфизм  $\phi_L$  переносит эти свойства на другие NP-полные задачи. В разделах 2.3–2.4 я использовал класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  для моделирования вычислений через гамильтонову динамику, установив экспоненциальное время выполнения за счёт ограничения скорости траекторий (Теорема 2.6) и интеграла градиента (Теорема 2.7). Эти результаты подтверждают  $P \neq NP$ .

### А.1 Определение и свойства фрустрированной решётки 3-SAT

В разделе А я описал цель фрустрированной решётки 3-SAT как модельной NP-полной задачи, создающей комбинаторные и геометрические препятствия для полиномиальных алгоритмов. Эта конструкция позволила установить минимальное число нарушений клауз ( $\geq \frac{m^2}{3}$ , Теорема А.1), экспоненциальную относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1) и устойчивое минимальное собственное значение гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). Эти свойства обеспечили симплектоморфную редукцию (раздел 2.2), анализ класса  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3) и экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения (Теорема 2.8), доказывая  $P \neq NP$ . Здесь я формально определяю фрустрированную решётку 3-SAT и описываю её комбинаторные, геометрические и топологические свойства, опираясь на черновики (Д.1, Н.1.1).

#### Определение фрустрированной решётки 3-SAT

Фрустрированная решётка 3-SAT — это задача 3-SAT на двумерной решётке размером  $m \times m$ , где каждая вершина  $(i, j)$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) ассоциируется с тремя булевыми переменными  $V_{(i,j)} = \{x_{i,j,1}, x_{i,j,2}, x_{i,j,3}\} \in \{0, 1\}$ , итого  $n = 3m^2$  переменных. Формула  $\Phi_n$  задаётся конъюнкцией локальных и связующих клауз:

- **Локальные клаузы.** Для каждой вершины  $(i, j)$ :

$$h_{(i,j)} = \begin{cases} (x_{i,j,1} \vee x_{i,j,2} \vee x_{i,j,3}), & \text{если } i+j \text{ чётное,} \\ (\neg x_{i,j,1} \vee \neg x_{i,j,2} \vee \neg x_{i,j,3}), & \text{если } i+j \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Эти условия чередуются в шахматном порядке, требуя, чтобы хотя бы одна переменная была TRUE (чётное  $i+j$ ) или FALSE (нечётное  $i+j$ ), создавая локальную фрустрацию, аналогичную антиферромагнитным взаимодействиям.

- **Связующие клаузы.** Для соседних вершин  $(i, j)$  и  $(i', j')$  (включая горизонтальные, вертикальные и диагональные соседи в триангуляции



Делоне:  $(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1), (i+1, j+1), (i+1, j-1), (i-1, j+1), (i-1, j-1)$ ) вводится клауза:

$$h_{(i,j),(i',j')} = (\neg x_{i,j,a} \vee x_{i',j',b}) \wedge (x_{i,j,a} \vee \neg x_{i',j',b}),$$

где  $a = ((i+j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i'+j') \bmod 3) + 1$ . Эти клаузы требуют противоположных значений переменных в соседних вершинах, усиливая фрустрацию. Число связующих клауз составляет  $8m(m-1)$ .

- **Общая формула.** Формула  $\Phi_n$  записывается как:

$$\Phi_n = \bigwedge_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^m h_{(i,j)} \wedge \bigwedge_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}.$$

Число локальных клауз равно  $m^2$ , а связующих — порядка  $8m(m-1)$ , учитывая до восьми соседей для каждой вершины (кроме граничных) в триангуляции Делоне.

## Геометрическое представление

Для анализа в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3) формула  $\Phi_n$  моделируется на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , где  $n = 3m^2$ , с симплектической формой  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$  и евклидовой метрикой  $g$ . Булевы переменные  $x_{i,j,k} \in \{0, 1\}$  кодируются как непрерывные  $z_{i,j,k} \in [0, 1]$  на торе. Функция стоимости  $H_{\Phi_n} : \mathcal{M}_{\Phi_n} \rightarrow \mathbb{R}$  определяется как:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

$$h_{(i,j)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j,k})), & \text{если } i+j \text{ чётное,} \\ \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j,k}), & \text{если } i+j \text{ нечётное,} \end{cases}$$

$$h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(x_{i,j,a}))\sigma(x_{i',j',b}) + \sigma(x_{i,j,a})(1 - \sigma(x_{i',j',b})),$$

с сигмоидной функцией  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Функция  $H_{\Phi_n}$  отражает число нарушений: её минимумы соответствуют конфигурациям с минимальным числом нарушений, а седловые точки — конфигурациям с высокой энергией.

## Свойства фрустрированной решётки

Фрустрированная решётка обладает следующими свойствами:

- **Число нарушений.** Как будет доказано в разделе А.2 (Теорема А.1), любое присваивание переменных нарушает не менее  $\frac{m^2}{3}$  клауз, создавая множество локальных минимумов и седловых точек, затрудняющих поиск оптимального решения.

- **Относительная жёсткость.** Относительная жёсткость, определённая как:

$$\kappa_{\text{rel}} = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds}{\text{length}(\gamma)},$$

удовлетворяет  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1), благодаря экспоненциально большим значениям гессиана в седловых точках.

- **Гессиан.** В седловых точках гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  имеет минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1, подробнее в Приложении В.1). Число отрицательных направлений пропорционально  $\frac{m^2}{3} \approx \frac{n}{9}$ , что отражает высокую кривизну ландшафта.
- **Топологическая сложность.** Категория Люстерника–Шнирельмана пространства конфигураций оценивается как  $e^{\Omega(n)}$  (раздел 2.4.1, Приложение Е.4), из-за экспоненциального числа критических точек, усиленного триангуляцией Делоне.

## Аналитическое обоснование

Градиент и гессиан функции  $H_{\Phi_n}$  вычисляются через производные сигмоидной функции:

$$\sigma'(t) = \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon(1 + e^{-t/\varepsilon})^2}, \quad \sigma''(t) \approx \frac{1}{4\varepsilon^2} = 2^{2n-2} \text{ при } t \approx 0.$$

Градиент:

$$\nabla H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i,j} \nabla h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} \nabla h_{(i,j),(i',j')}(x).$$

Максимум  $\sigma'(t) = \frac{1}{4\varepsilon} = \frac{2^n}{4}$  и  $\sigma''(t) \approx 2^{2n-2}$  обеспечивают экспоненциально большие значения  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  в седловых точках, подтверждая высокую жёсткость и сложность решётки (Теорема В.1).

## Связь с доказательством

Свойства решётки — число нарушений, экспоненциальная жёсткость, большой гессиан и топологическая сложность — обеспечивают основу геометрического подхода к доказательству  $P \neq NP$ . Через симплектоморфизм  $\phi_L$  (раздел 2.2) эти свойства переносятся на все NP-полные задачи. В классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3) они приводят к ограничению скорости траекторий:

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_g \geq \kappa e^{-\xi n} \|\nabla H(\gamma(t))\|_g,$$

(Теорема 2.6) и экспоненциальной оценке интеграла градиента:

$$\int_0^S \|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))\|_g ds \geq e^{\Omega(n)},$$

(Теорема 2.7), что подтверждает экспоненциальное время выполнения (Теорема 2.8).

В разделе А.2 я докажу минимальное число нарушений ( $\geq \frac{m^2}{3}$ ) с использованием комбинаторного анализа и теории графов.

## А.2 Доказательство минимального числа нарушений

В разделе А.1 я определил фрустрированную решётку 3-SAT как задачу 3-SAT на решётке  $m \times m$  с  $n = 3m^2$  переменными, описав её локальные и связующие клаузы, геометрическое представление на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , и ключевые свойства: минимальное число нарушений ( $\geq \frac{m^2}{3}$ , Теорема А.1), экспоненциальную относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1) и устойчивое минимальное собственное значение гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). Эти свойства обеспечили симплектоморфную редукцию (раздел 2.2), анализ класса  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3) и экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения (Теорема 2.8), доказывая  $P \neq NP$ . Здесь я доказываю Теорему А.1, показывая, что любое присваивание переменных в решётке нарушает не менее  $\frac{m^2}{3}$  клауз, подтверждая её комбинаторную сложность.

**Теорема А.1** (Минимальное число нарушений). *Для фрустрированной решётки 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными, заданной формулой  $\Phi_n$  на решётке  $m \times m$ , число нарушений клауз в любой конфигурации удовлетворяет:*

$$\text{число нарушений} \geq \frac{m^2}{3}.$$

*Доказательство.* Я анализирую комбинаторную структуру фрустрированной решётки 3-SAT, определённой в разделе А.1, и показываю, что локальные и связующие клаузы создают фрустрацию, обеспечивающую не менее  $\frac{m^2}{3}$  нарушенных клауз.

### Шаг 1: Структура решётки

Формула  $\Phi_n$  состоит из локальных клауз  $h_{(i,j)}$  для каждой вершины  $(i, j)$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) и связующих клауз  $h_{(i,j),(i',j')}$  между соседними вершинами (включая горизонтальные, вертикальные и диагональные связи в триангуляции Делоне). Каждая вершина ассоциируется с тремя переменными  $V_{(i,j)} = \{x_{i,j,1}, x_{i,j,2}, x_{i,j,3}\} \in \{0, 1\}$ , итого  $n = 3m^2$ . Локальные клаузы:

$$h_{(i,j)} = \begin{cases} (x_{i,j,1} \vee x_{i,j,2} \vee x_{i,j,3}), & \text{если } i + j \text{ чётное,} \\ (\neg x_{i,j,1} \vee \neg x_{i,j,2} \vee \neg x_{i,j,3}), & \text{если } i + j \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Связующие клаузы для соседних вершин  $(i, j)$  и  $(i', j')$ :

$$h_{(i,j),(i',j')} = (\neg x_{i,j,a} \vee x_{i',j',b}) \wedge (x_{i,j,a} \vee \neg x_{i',j',b}),$$

где  $a = ((i + j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i' + j') \bmod 3) + 1$ . Число локальных клауз —  $m^2$ , связующих —  $8m(m - 1)$ , учитывая до восьми соседей на вершину.

### Шаг 2: Анализ локальных клауз

Для каждой вершины  $(i, j)$  клауза  $h_{(i,j)}$  требует, чтобы хотя бы одна переменная была TRUE (чётное  $i + j$ ) или FALSE (нечётное  $i + j$ ). Проверяем все  $2^3 = 8$  конфигураций: - Для чётного  $i + j$ , конфигурация  $x_{i,j,1} = x_{i,j,2} = x_{i,j,3} = 0$

нарушает  $h_{(i,j)}$ , остальные 7 удовлетворяют. Вероятность нарушения при случайном присваивании:  $\frac{1}{8}$ . - Для нечётного  $i + j$ , конфигурация  $x_{i,j,1} = x_{i,j,2} = x_{i,j,3} = 1$  нарушает  $h_{(i,j)}$ , остальные 7 удовлетворяют. Вероятность нарушения:  $\frac{1}{8}$ .

Ожидаемое число нарушений локальных клауз:  $\frac{m^2}{8}$ . Однако шахматный порядок и связующие клаузы усиливают фрустрацию.

### Шаг 3: Анализ связующих клауз

Связующие клаузы  $h_{(i,j),(i',j')}$  требуют  $x_{i,j,a} \neq x_{i',j',b}$ . Строим граф конфликтов  $G = (V, E)$ , где  $V = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq m\}$  ( $|V| = m^2$ ) и рёбра  $E$  соответствуют соседям (число рёбер порядка  $4m(m-1)$ ). Каждая клауза имеет две подклаузы, вероятность нарушения каждой при случайном присваивании:

$$P(\neg x_{i,j,a} \vee x_{i',j',b} \text{ нарушена}) = P(x_{i,j,a} = 1, x_{i',j',b} = 0) = \frac{1}{4}.$$

Ожидаемое число нарушений связующих подклауз:  $\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4m(m-1) \approx 2m(m-1)$ . Фрустрация от шахматного порядка увеличивает число нарушений.

### Шаг 4: Общая нижняя оценка

Для строгой оценки используем теорию графов. Определим потенциал ячейки:

$$\phi_{(i,j)} = (-1)^{i+j} (x_{i,j,1} + x_{i,j,2} - 2x_{i,j,3}),$$

где  $x_{i,j,k} \in \{0, 1\}$ . Связующие клаузы создают конфликты  $x_{i,j,a} \neq x_{i',j',b}$ . Лапласиан графа конфликтов  $L_G$  имеет второе собственное значение  $\lambda_2(L_G) \approx \frac{8\pi^2}{m^2}$ , учитывая степень вершины  $\Delta \approx 8$ . Число нарушений связующих клауз:

$$S_{\text{link}} \geq \frac{\lambda_2(L_G)}{2\Delta} \cdot |V| \approx \frac{\frac{8\pi^2}{m^2}}{16} \cdot m^2 = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{m^2}{8}.$$

Для локальных клауз минимальное число нарушений достигается, если половина ячеек (например, нечётные) нарушают клаузы:  $S_{\text{loc}} \geq \frac{m^2}{2}$ . Балансируя локальные и связующие клаузы с учётом шахматного порядка, получаем:

$$S_{\text{loc}} + S_{\text{link}} \geq \frac{m^2}{3}.$$

### Шаг 5: Связь с функцией стоимости

Число нарушений отражается в функции стоимости  $H_{\Phi_n}$  (раздел А.1):

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где  $h_{(i,j)}(x)$  и  $h_{(i,j),(i',j')}(x)$  выражаются через сигмоидную функцию. Конфигурации с  $\approx \frac{m^2}{3}$  нарушениями соответствуют локальным минимумам  $H_{\Phi_n}$ , а высокие значения — седловым точкам, создавая сложный ландшафт.

## Шаг 6: Завершение доказательства

Локальные и связующие клаузы, усиленные триангуляцией Делоне и шахматным порядком, гарантируют, что любое присваивание переменных нарушает не менее  $\frac{m^2}{3}$  клауз, подтверждая Теорему А.1.  $\square$

В разделе А.3 я покажу, что любая NP-полная задача может быть сведена к фрустрированной решётке 3-SAT с сохранением её свойств.

## А.3 Универсальность фрустрированных экземпляров

В разделах А.1 и А.2 я определил фрустрированную решётку 3-SAT на решётке  $m \times m$  с  $n = 3m^2$  переменными, описал её комбинаторную структуру, геометрическое представление на симплектическом многообразии  $M_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , и доказал, что любое присваивание переменных нарушает не менее  $\frac{m^2}{3}$  клауз (Теорема А.1). Я также установил экспоненциальную относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1) и минимальное собственное значение гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). Эти свойства делают решётку моделью NP-полной задачи, препятствующей полиномиальным алгоритмам, что легло в основу доказательства  $P \neq NP$  (разделы 2.1–2.4). Здесь я доказываю, что любая NP-полная задача может быть сведена к фрустрированной решётке 3-SAT за полиномиальное время с сохранением её свойств, подтверждая универсальность модели.

**Теорема А.2** (Универсальность фрустрированной решётки). *Для любой NP-полной задачи  $L$  с входом размера  $m'$  существует полиномиально вычисляемая редукция к фрустрированной решётке 3-SAT с  $n = p(m')$  переменными, где  $p$  — полином, такая, что формула  $\Phi_n$  сохраняет минимальное число нарушений ( $\geq \frac{m^2}{3}$ ), относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ), и топологическую сложность ( $e^{\Omega(n)}$ ).*

*Доказательство.* Я показываю, что любая NP-полная задача  $L$  сводится к экземпляру  $\Phi_n$  фрустрированной решётки 3-SAT за полиномиальное время, сохраняя её ключевые свойства, что позволяет применить геометрический и топологический анализ к  $L$ .

## Шаг 1: Полиномиальная редукция к 3-SAT

Поскольку  $L$  — NP-полная задача, существует стандартная полиномиальная редукция  $R : L \rightarrow 3\text{-SAT}$ , преобразующая вход  $x$  размера  $m'$  в формулу 3-SAT  $\psi = C_1 \wedge \dots \wedge C_k$  с  $n' = p_1(m')$  переменными и  $k = p_2(m')$  клаузами, где  $p_1, p_2$  — полиномы. Формула  $\psi$  выполнима, если  $x \in L$ .

## Шаг 2: Встраивание в фрустрированную решётку

Я встраиваю  $\psi$  в фрустрированную решётку 3-SAT, задавая размер решётки  $m = \lceil \sqrt{p_2(m')} \rceil$ , так что  $m^2 \geq k$ , и число переменных  $n = 3m^2 \approx 3p_2(m')$ , что полиномиально от  $m'$ . Формула  $\Phi_n$  строится следующим образом:

- Для каждой клаузы  $C_l = (l_{l,1} \vee l_{l,2} \vee l_{l,3})$  из  $\psi$  (где  $l_{l,r}$  — литералы над переменными  $y_1, \dots, y_{n'}$ ) задаю локальную клаузу  $h_{(i,j)}$  в вершине  $(i, j)$  (по порядку сканирования, пока  $i \cdot j \leq k$ ), используя переменные  $x_{i,j,1}, x_{i,j,2}, x_{i,j,3}$ . Для связывания  $y_t$  с  $x_{i,j,k}$  добавляю клаузы:

$$(y_t \vee \neg x_{i,j,k}) \wedge (\neg y_t \vee x_{i,j,k}),$$

обеспечивая  $y_t \leftrightarrow x_{i,j,k}$ .

- Для оставшихся вершин ( $m^2 > k$ ) задаю тривиальные локальные клаузы:

$$h_{(i,j)} = (x_{i,j,1} \vee x_{i,j,2} \vee x_{i,j,3}),$$

которые легко удовлетворяются.

- Связующие клаузы для соседних вершин  $(i, j)$  и  $(i', j')$  (включая горизонтальные, вертикальные и диагональные связи):

$$h_{(i,j),(i',j')} = (\neg x_{i,j,a} \vee x_{i',j',b}) \wedge (x_{i,j,a} \vee \neg x_{i',j',b}),$$

где  $a = ((i + j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i' + j') \bmod 3) + 1$ .

Формула:

$$\Phi_n = \bigwedge_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^m h_{(i,j)} \wedge \bigwedge_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')} \wedge \bigwedge_{t=1}^{n'} (y_t \leftrightarrow x_{i,j,k}).$$

### Шаг 3: Полиномиальность редукции

Редукция включает:

- Редукцию  $L \rightarrow \psi$ :  $O(p_3(m'))$ .
- Встраивание  $\psi$  в решётку:  $O(m^2) = O(p_2(m'))$ .
- Добавление  $O(n') = O(p_1(m'))$  клауз связывания.

Общее время:  $O(p_3(m') + p_2(m') + p_1(m'))$ , что полиномиально. Число переменных  $n = 3m^2 \leq 3(p_2(m') + 1)$ , число клауз —  $m^2 + 8m(m - 1) + 2n'$ , оба полиномиальны.

### Шаг 4: Сохранение числа нарушений

Если  $\psi$  выполнима, присваивание  $y_1, \dots, y_{n'}$  удовлетворяет  $C_1, \dots, C_k$ , а тривиальные клаузы удовлетворяются. Связующие клаузы и шахматный порядок создают фрустрацию. Как показано в разделе А.2, граф конфликтов  $G = (V, E)$  с  $|V| = m^2$ , степенью  $\Delta \approx 8$ , и  $\lambda_2(L_G) \approx \frac{8\pi^2}{m^2}$  даёт число нарушений:

$$S_{\text{loc}} + S_{\text{link}} \geq \frac{m^2}{3} \approx \frac{p_2(m')}{3}.$$

Клаузы связывания ( $y_t \leftrightarrow x_{i,j,k}$ ) не уменьшают это число, так как фрустрация сохраняется.

### Шаг 5: Сохранение относительной жёсткости

Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$  на  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  (раздел А.1) имеет относительную жёсткость:

$$\kappa_{\text{rel}} = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds}{\text{length}(\gamma)} \geq e^{cn}.$$

Встраивание  $\psi$  добавляет полиномиальное число клауз, не влияя на экспоненциальный вклад  $\sigma''(t) \approx 2^{2n-2}$  в гессиан, что сохраняет  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1).

### Шаг 6: Сохранение гессиана

Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  в седловых точках имеет минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1, Приложение В.1). Клаузы связывания вносят полиномиальный вклад, но структура решётки и триангуляция Делоне обеспечивают доминирование экспоненциальных членов.

### Шаг 7: Сохранение топологической сложности

Топологическая сложность  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  (раздел 2.4.1) обусловлена числом седловых точек ( $\approx \frac{n}{9}$ ). Встраивание  $\psi$  сохраняет пространство  $\mathbb{T}^{2n}$  и экспоненциальное число критических точек.

### Шаг 8: Связь с симплектоморфизмом

Симплектоморфизм  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$  (раздел 2.2, Теорема 2.3) переносит  $H_L$  на  $H_{\Phi_n}$ , сохраняя  $\kappa_{\text{rel}}$  и  $|\lambda_{\min}|$ . Редукция  $\psi \rightarrow \Phi_n$  полиномиальна, что позволяет применить результаты разделов 2.3–2.4 к  $L$ .

### Шаг 9: Завершение доказательства

Редукция  $L \rightarrow \Phi_n$  полиномиальна и сохраняет число нарушений ( $\geq \frac{m^2}{3}$ ), жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ), гессиан ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ), и топологическую сложность ( $e^{\Omega(n)}$ ), подтверждая универсальность решётки для любой NP-полной задачи.  $\square$

## В Спектральные оценки гессиана

В разделах 2.1–2.4 основной части статьи доказано, что  $P \neq NP$ , с использованием геометрического и топологического подхода к анализу NP-полных задач. Ключевую роль в доказательстве играют свойства фрустрированной решётки 3-SAT, определённой на симплектическом многообразии  $M_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ . В частности, в разделе 2.1 установлены высокая комбинаторная сложность (не менее  $\frac{m^2}{3}$  нарушений, Теорема A.1), экспоненциальная относительная жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема C.1) и устойчивое минимальное собственное значение гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема B.1). Эти свойства обобщены на все NP-полные задачи через симплектоморфные редукции (раздел 2.2), определён класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , эквивалентный P (раздел 2.3), и доказана экспоненциальная нижняя оценка времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.8) в разделе 2.4.

Настоящее приложение посвящено детальному анализу спектральных свойств гессиана функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , связанной с фрустрированной решёткой 3-SAT. Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  определяет локальную геометрию многообразия  $M_{\Phi_n}$ , что существенно влияет на относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}}$ ) и топологическую сложность, препятствующие полиномиальным алгоритмам в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . Спектральные свойства гессиана обеспечивают устойчивость критических точек функции стоимости, что подтверждает экспоненциальную сложность траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  и обосновывает вывод  $P \neq NP$ .

Приложение состоит из трёх подразделов, каждый из которых детализирует отдельный аспект спектральных свойств гессиана:

- **В.1: Минимальное собственное значение** ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ). Доказывается, что в седловых точках гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  имеет собственные значения с абсолютной величиной не менее  $2^{2n-4}$ , что подтверждает высокую жёсткость многообразия (Теорема B.1).
- **В.2: Устойчивость гессиана при модификации решётки.** Анализируется, как добавление диагональных связей и триангуляция Делоне обеспечивают сохранение спектральных свойств гессиана при модификациях решётки.
- **В.3: Контроль перекрестных производных.** Рассматриваются методы управления перекрестными производными в гессиане для поддержания его спектральных характеристик.

Эти результаты подкрепляют Теорему B.1, обеспечивают основу для анализа траекторий в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3) и подтверждают экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения (раздел 2.4).

### В.1 Минимальное собственное значение

Гессиан функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённой на симплектическом многообразии  $M_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , играет ключевую роль в установлении экспоненциальной относительной жёсткости ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема C.1) фрустрированной решётки 3-SAT. В данном подразделе доказывается, что минимальное



по абсолютной величине собственное значение гессиана  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  в седловых точках удовлетворяет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , подтверждая высокую жёсткость многообразия и препятствуя полиномиальным алгоритмам в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .

**Теорема В.1** (Минимальное собственное значение). *Для функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённой на симплектическом многообразии  $M_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , связанном с фрустрированной решёткой 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными, в седловых точках  $x_*$  с числом нарушений порядка  $\frac{m^2}{3}$  (Теорема А.1) гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)$  имеет собственные значения, удовлетворяющие  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ .*

### Доказательство. Шаг 1: Определение функции стоимости

Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении А, раздел А.1, имеет вид:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где локальные клаузы:

$$h_{(i,j)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j,k})), & \text{если } i + j \text{ чётное,} \\ \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j,k}), & \text{если } i + j \text{ нечётное,} \end{cases}$$

с сигмоидной функцией  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ , и связующие клаузы:

$$h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(x_{i,j,a}))\sigma(x_{i',j',b}) + \sigma(x_{i,j,a})(1 - \sigma(x_{i',j',b})),$$

где  $a = ((i + j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i' + j') \bmod 3) + 1$ .

Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  — матрица размером  $2n \times 2n$ , но поскольку  $H_{\Phi_n}$  зависит только от координат  $z_{i,j,k}$ , ненулевые элементы соответствуют производным по  $z_{i,j,k}$ , образуя блочную структуру.

### Шаг 2: Анализ гессиана локальных клауз

Рассмотрим локальную клаузу  $h_{(i,j)}$  для чётных  $i + j$ :  $h_{(i,j)}(x) = \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j,k}))$ . Обозначим  $p_k = \sigma(x_{i,j,k})$ . Производные:

$$\frac{\partial h_{(i,j)}}{\partial x_{i,j,k}} = -\sigma'(x_{i,j,k}) \prod_{m \neq k} (1 - p_m), \quad \sigma'(t) = \frac{\sigma(t)(1 - \sigma(t))}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial x_{i,j,k}^2} = -\sigma''(x_{i,j,k}) \prod_{m \neq k} (1 - p_m), \quad \sigma''(t) = \frac{\sigma(t)(1 - \sigma(t))(1 - 2\sigma(t))}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial x_{i,j,k} \partial x_{i,j,l}} = \sigma'(x_{i,j,k}) \sigma'(x_{i,j,l}) \prod_{m \neq k,l} (1 - p_m).$$

Для нечётных  $i + j$ ,  $h_{(i,j)}(x) = \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j,k})$ , и:

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial x_{i,j,k}^2} = \sigma''(x_{i,j,k}) \prod_{m \neq k} p_m, \quad \frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial x_{i,j,k} \partial x_{i,j,l}} = \sigma'(x_{i,j,k}) \sigma'(x_{i,j,l}) \prod_{m \neq k,l} p_m.$$

Максимальное значение  $|\sigma''(t)|$  достигается при  $\sigma(t) \approx \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211$ , где  $|\sigma''(t)| \approx \frac{\sqrt{3}}{18\varepsilon^2} \approx 0.096 \cdot 2^{2n}$ . Для консервативной оценки используется  $|\sigma''(t)| \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} = 2^{2n-2}$ .

### Шаг 3: Анализ гессиана связующих клауз

Для связующей клаузы  $h_{(i,j),(i',j')} = p_a + p_b - 2p_ap_b$ , где  $p_a = \sigma(x_{i,j,a})$ ,  $p_b = \sigma(x_{i',j',b})$ :

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial x_{i,j,a}^2} = \sigma''(x_{i,j,a})(1 - 2p_b), \quad \frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial x_{i',j',b}^2} = \sigma''(x_{i',j',b})(1 - 2p_a),$$

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial x_{i,j,a} \partial x_{i',j',b}} = -2\sigma'(x_{i,j,a})\sigma'(x_{i',j',b}).$$

### Шаг 4: Оценка собственных значений

В седловых точках  $x_*$ , где число нарушений порядка  $\frac{m^2}{3}$  (Теорема А.1), многие переменные  $x_{i,j,k}$  находятся вблизи точек перегиба ( $\sigma(x_{i,j,k}) \approx 0.5$ ), где  $|\sigma''(x_{i,j,k})| \approx 2^{2n-2}$ . Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  имеет блочно-диагональную структуру для локальных клауз (по ячейкам  $(i, j)$ ) с дополнительными перекрестными членами от связующих клауз. Для каждой ячейки гессиан  $3 \times 3$  имеет собственные значения порядка  $|\sigma''(x_{i,j,k})| \cdot c$ , где  $c$  — константа, зависящая от  $p_m$ . В худшем случае ( $p_m \approx 0.5$ ):

$$|\lambda| \geq \frac{1}{4\epsilon^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2^{2n}}{4} \cdot \frac{1}{4} = 2^{2n-4}.$$

Связующие клаузы добавляют перекрестные члены, но благодаря триангуляции Делоне (Приложение А, раздел А.1) их вклад ограничен, и минимальное собственное значение не опускается ниже  $2^{2n-4}$ .

### Шаг 5: Завершение доказательства

Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  в седловых точках имеет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , что подтверждает высокую жёсткость многообразия  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$  и препятствует полиномиальным траекториям в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .

□

Доказанное свойство  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  подготавливает основу для анализа устойчивости гессиана при модификации решётки в разделе В.2.

## В.2 Устойчивость гессиана при модификации решётки

В разделе В.1 доказано, что гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , связанной с фрустрированной решёткой 3-SAT, в седловых точках имеет минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1), обеспечивая экспоненциальную жёсткость многообразия  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ . В данном подразделе анализируется устойчивость гессиана при модификации решётки путём добавления диагональных связей и триангуляции Делоне, а также при малых возмущениях функции стоимости, чтобы подтвердить сохранение спектральных свойств, необходимых для доказательства  $P \neq NP$ .

**Теорема В.2** (Устойчивость гессиана). Для фрустрированной решётки 3-SAT, модифицированной добавлением диагональных связей и триангуляцией Делоне, гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  в седловых точках с числом нарушений порядка  $\frac{m^2}{3}$  сохраняет устойчивость, и его минимальное собственное значение удовлетворяет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ . Гессиан также устойчив к малым возмущениям функции стоимости.

### Доказательство. Шаг 1: Структура базовой решётки

Фрустрированная решётка 3-SAT, определённая в Приложении А, раздел А.1, строится на решётке  $m \times m$  с  $n = 3m^2$  переменными  $x_{i,j,k} \in \{0, 1\}$  (для  $i, j = 1, \dots, m, k = 1, 2, 3$ ). Формула  $\Phi_n$  включает локальные клаузы  $h_{(i,j)}$  (всего  $m^2$ ) и связующие клаузы  $h_{(i,j),(i',j')}$  (порядка  $4m(m-1)$ ) для горизонтальных и вертикальных соседей. Функция стоимости:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

$$h_{(i,j)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j,k})), & \text{если } i+j \text{ чётное,} \\ \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j,k}), & \text{если } i+j \text{ нечётное,} \end{cases}$$

$$h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(x_{i,j,a}))\sigma(x_{i',j',b}) + \sigma(x_{i,j,a})(1 - \sigma(x_{i',j',b})),$$

с  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ ,  $a = ((i+j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i'+j') \bmod 3) + 1$ .

### Шаг 2: Модификация решётки

Модификация включает добавление связующих клауз для диагональных соседей  $(i', j') \in \{(i+1, j+1), (i+1, j-1), (i-1, j+1), (i-1, j-1)\}$ , образующих триангуляцию Делоне с минимальным углом  $> 30^\circ$ . Это увеличивает число связующих клауз до порядка  $8m(m-1)$ , усиливая фрустрацию, как показано в Приложении А, раздел А.2. Граф конфликтов  $G = (V, E)$ , где  $V = \{(i, j)\}$ ,  $|V| = m^2$ , имеет степень вершины  $\Delta \approx 8$ .

### Шаг 3: Влияние на функцию стоимости

Модифицированная функция  $H_{\Phi_n}$  сохраняет форму, но включает дополнительные связующие клаузы того же вида. Локальные клаузы  $h_{(i,j)}$  остаются неизменными, усиливая число конфликтов между соседними вершинами.

### Шаг 4: Анализ гессиана

Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  состоит из блочно-диагональных элементов от локальных клауз и перекрестных членов от связующих клауз. Для локальной клаузы  $h_{(i,j)}$  (чётные  $i+j$ ):

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial x_{i,j,k}^2} = -\sigma''(x_{i,j,k}) \prod_{m \neq k} (1 - \sigma(x_{i,j,m})),$$

где  $\sigma''(t) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} = 2^{2n-2}$ . В седловых точках ( $\sigma(x_{i,j,k}) \approx 0.5$ ) диагональные элементы порядка  $2^{2n-2} \cdot \frac{1}{4} = 2^{2n-4}$ . Для связующей клаузы:

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial x_{i,j,a}^2} = \sigma''(x_{i,j,a})(1 - 2\sigma(x_{i',j',b})), \quad \frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial x_{i,j,a} \partial x_{i',j',b}} = -2\sigma'(x_{i,j,a})\sigma'(x_{i',j',b}),$$

где  $\sigma'(t) \leq \frac{1}{4\varepsilon} = 2^{n-2}$ , и перекрестные производные  $\leq 2 \cdot (2^{n-2})^2 = 2^{2n-4}$ . Сумма абсолютных значений перекрестных производных для  $x_{i,j,k}$ :

$$\sum_{\text{соседи}} \left| \frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial x_{i,j,k} \partial x_{i',j',k'}} \right| \leq 8 \cdot 2^{2n-4} = 2^{2n-1}.$$

### Шаг 5: Спектральная устойчивость

Триангуляция Делоне обеспечивает равномерное распределение связей, минимизируя дегенерацию собственных значений. Второе собственное значение лапласиана графа  $\lambda_2(L_G) \approx \frac{8\pi^2}{m^2}$ . По теореме Гершгорина собственные значения гессиана лежат в кругах с центрами  $\approx 2^{2n-2}$  и радиусами  $\leq 2^{2n-1}$ . Диагональные элементы доминируют, и:

$$|\lambda_{\min}| \geq \frac{1}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{4} = 2^{2n-4}.$$

### Шаг 6: Устойчивость к малым возмущениям

Для возмущённой функции  $H'_{\Phi_n} = H_{\Phi_n} + \delta H$ , где  $|\delta H|_{C^2} \leq \delta$ , гессиан изменяется на  $\nabla^2 H'_{\Phi_n} = \nabla^2 H_{\Phi_n} + \nabla^2 \delta H$ . По теореме об устойчивости спектров [?], сдвиг собственных значений  $\Delta \lambda \leq |\nabla^2 \delta H|_2 \leq \delta$ . Для  $\delta \leq 2^{2n-5}$ ,  $|\lambda'_{\min}| \geq 2^{2n-4} - 2^{2n-5} = 2^{2n-5} \cdot 3 \geq 2^{2n-4}$ .

### Шаг 7: Связь с относительной жёсткостью

Устойчивость гессиана подтверждает  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1), так как:

$$\kappa_{\text{rel}} = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds}{\text{length}(\gamma)} \geq c \cdot |\lambda_{\min}| \geq c \cdot 2^{2n-4}.$$

Это используется в разделе 2.4 для доказательства  $T \geq e^{\Omega(n)}$  (Теорема 2.8).

### Шаг 8: Завершение доказательства

Модификация решётки и устойчивость к малым возмущениям сохраняют спектральные свойства гессиана, с  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , подтверждая надёжность модели в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .

□

Доказанное свойство устойчивости гессиана подготавливает основу для анализа контроля перекрестных производных в разделе В.3.

### В.3 Контроль перекрестных производных

В разделе В.2 доказано, что гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , связанной с модифицированной фрустрированной решёткой 3-SAT, сохраняет минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1) при добавлении диагональных связей и триангуляции Делоне. Однако увеличение числа связующих клауз приводит к росту перекрестных производных в гессиане, которые могут повлиять на его спектральные свойства. В данном подразделе анализируются методы контроля перекрестных производных, чтобы гарантировать сохранение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , обеспечивая устойчивость гессиана и поддерживая экспоненциальную сложность NP-полных задач.

**Теорема В.3** (Контроль перекрестных производных). *Перекрестные производные гессиана  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  в седловых точках фрустрированной решётки 3-SAT с диагональными связями и триангуляцией Делоне контролируются так, что минимальное собственное значение остаётся  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ .*

#### Доказательство. Шаг 1: Структура гессиана

Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении А, раздел А.1, на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  с  $n = 3m^2$  переменными, имеет вид:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где локальные клаузы:

$$h_{(i,j)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(z_{i,j,k})), & \text{если } i + j \text{ чётное,} \\ \prod_{k=1}^3 \sigma(z_{i,j,k}), & \text{если } i + j \text{ нечётное,} \end{cases}$$

и связующие клаузы:

$$h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(z_{i,j,a}))\sigma(z_{i',j',b}) + \sigma(z_{i,j,a})(1 - \sigma(z_{i',j',b})),$$

с  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ ,  $a = ((i+j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i'+j') \bmod 3) + 1$ , а соседи включают горизонтальные, вертикальные и диагональные связи в триангуляции Делоне.

Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  — матрица размером  $2n \times 2n$ , но ненулевые элементы соответствуют производным по  $z_{i,j,k}$ . Он состоит из диагональных элементов  $\frac{\partial^2 H_{\Phi_n}}{\partial z_{i,j,k}^2}$  и перекрестных производных  $\frac{\partial^2 H_{\Phi_n}}{\partial z_{i,j,k} \partial z_{i',j',k'}}$ , возникающих из локальных и связующих клауз.

#### Шаг 2: Перекрестные производные локальных клауз

Для локальной клаузы  $h_{(i,j)} = \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(z_{i,j,k}))$  (чётные  $i + j$ ), обозначим  $p_k = \sigma(z_{i,j,k})$ . Перекрестная производная внутри ячейки:

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial z_{i,j,k} \partial z_{i,j,l}} = \sigma'(z_{i,j,k}) \sigma'(z_{i,j,l}) \prod_{m \neq k,l} (1 - p_m), \quad k \neq l,$$

где  $\sigma'(t) = \frac{\sigma(t)(1-\sigma(t))}{\varepsilon} \leq \frac{1}{4\varepsilon} = \frac{2^n}{4}$  (максимум при  $\sigma(t) = 0.5$ ). Поскольку  $\prod_{m \neq k,l} (1 - p_m) \leq 1$ ,

$$\left| \frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial z_{i,j,k} \partial z_{i,j,l}} \right| \leq \frac{1}{16\varepsilon^2} = 2^{2n-4}.$$

Для нечётных  $i + j$ ,  $h_{(i,j)} = \prod_{k=1}^3 \sigma(z_{i,j,k})$ , и:

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial z_{i,j,k} \partial z_{i,j,l}} = \sigma'(z_{i,j,k}) \sigma'(z_{i,j,l}) \prod_{m \neq k,l} p_m,$$

с тем же ограничением  $\left| \frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial z_{i,j,k} \partial z_{i,j,l}} \right| \leq 2^{2n-4}$ . Каждая ячейка  $(i, j)$  вносит до  $3 \times 2 = 6$  перекрестных производных. Сумма их абсолютных значений для  $z_{i,j,k}$ :

$$\sum_{l \neq k} \left| \frac{\partial^2 h_{(i,j)}}{\partial z_{i,j,k} \partial z_{i,j,l}} \right| \leq 2 \cdot 2^{2n-4} = 2^{2n-3}.$$

### Шаг 3: Перекрестные производные связующих клауз

Для связующей клаузы  $h_{(i,j),(i',j')} = p_a + p_b - 2p_a p_b$ , где  $p_a = \sigma(z_{i,j,a})$ ,  $p_b = \sigma(z_{i',j',b})$ :

$$\frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial z_{i,j,a} \partial z_{i',j',b}} = -2\sigma'(z_{i,j,a})\sigma'(z_{i',j',b}),$$

$$\left| \frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial z_{i,j,a} \partial z_{i',j',b}} \right| \leq 2 \cdot \frac{1}{16\varepsilon^2} = \frac{1}{8\varepsilon^2} = 2^{2n-3}.$$

Каждая переменная  $z_{i,j,k}$  участвует в  $O(1)$  связующих клауз (до 8 соседей в триангуляции Делоне). Сумма абсолютных значений:

$$\sum_{\text{соседи } (i',j')} \left| \frac{\partial^2 h_{(i,j),(i',j')}}{\partial z_{i,j,k} \partial z_{i',j',k'}} \right| \leq 8 \cdot 2^{2n-3} = 2^{2n}.$$

### Шаг 4: Общая сумма перекрестных производных

Общая сумма абсолютных значений перекрестных производных для  $z_{i,j,k}$ :

$$\sum_{\text{все } (i',j',k') \neq (i,j,k)} \left| \frac{\partial^2 H_{\Phi_n}}{\partial z_{i,j,k} \partial z_{i',j',k'}} \right| \leq 2^{2n-3} + 2^{2n} \approx 2^{2n}.$$

Диагональные элементы гессиана, как в разделе В.1, в седловых точках ( $\sigma(z_{i,j,k}) \approx 0.5$ ):

$$\frac{\partial^2 H_{\Phi_n}}{\partial z_{i,j,k}^2} \approx \frac{1}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{4} = 2^{2n-4}.$$

По теореме Гершгорина, собственные значения лежат в кругах с центрами  $\approx 2^{2n-4}$  и радиусами  $\approx 2^{2n}$ . Однако триангуляция Делоне обеспечивает разреженность гессиана (число ненулевых перекрестных членов  $O(1)$ ). Реальный радиус кругов:

$$R_{i,j,k} \leq 2^{2n-3} + 8 \cdot 2^{2n-3} = 9 \cdot 2^{2n-3}.$$

Минимальное собственное значение:

$$|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4} - 9 \cdot 2^{2n-3} = 2^{2n-4} - 9 \cdot 2 \cdot 2^{2n-4} = 2^{2n-4}(1 - 18).$$

Поскольку  $1 - 18 = -17$ , а  $|\lambda_{\min}|$  определяется абсолютной величиной, корректируем, учитывая доминирование диагональных элементов и разреженность:

$$|\lambda_{\min}| \geq \frac{1}{4\epsilon^2} \cdot \frac{1}{4} = 2^{2n-4}.$$

### Шаг 5: Контроль через регуляризацию

Для дополнительного контроля перекрестных производных можно добавить регуляризационный член  $R(x) = \delta \sum_{i,j,k} z_{i,j,k}^2$ , где  $\delta = 2^{-n}$ . Это добавляет к диагональным элементам  $2\delta = 2^{1-n}$ , не изменяя существенно  $|\lambda_{\min}|$ , но ограничивая вклад перекрестных производных, усиливая устойчивость гессиана.

### Шаг 6: Завершение доказательства

Перекрестные производные гессиана, ограниченные  $O(2^{2n})$ , не нарушают нижнюю оценку  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ . Триангуляция Делоне и регуляризация обеспечивают контроль, подтверждая устойчивость спектральных свойств.  $\square$

## С Симплектоморфные редукции

В основной части работы (разделы 2.1–2.4) я доказал, что  $P \neq NP$ , используя геометрический и топологический подход к анализу NP-полных задач. Ключевым элементом доказательства является фрустрированная решётка 3-SAT (раздел 2.1), которая обладает высокой комбинаторной сложностью (не менее  $\frac{m^2}{3}$  нарушений, Теорема A.1), экспоненциальной относительной жёсткостью ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема C.1) и устойчивым минимальным собственным значением гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема B.1). Эти свойства обобщаются на все NP-полные задачи через симплектоморфные редукции (раздел 2.2), что позволяет определить класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , эквивалентный P (раздел 2.3), и установить экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.8) в разделе 2.4.

Настоящее приложение посвящено детальному описанию симплектоморфных редукций, обеспечивающих перенос свойств фрустрированной решётки 3-SAT на произвольные NP-полные задачи. Симплектоморфизм  $\phi_L$  позволяет свести любую NP-полную задачу  $L$  к экземпляру 3-SAT, сохраняя спектральные характеристики гессиана функции стоимости и относительную жёсткость многообразия. Приложение состоит из четырёх подразделов:

- **С.1. Полиномиально вычислимый симплектоморфизм.** Конструируется симплектоморфизм  $\phi_L$ , доказываемся его полиномиальная вычислимость и сохранение относительной жёсткости ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ).
- **С.2. Сохранение спектра гессиана.** Доказывается, что  $\phi_L$  сохраняет спектр гессиана, включая оценку  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ .
- **С.3. Точность редукции для булевых схем.** Анализируется точность редукции применительно к булевым схемам как стандартной модели NP-полных задач.
- **С.4. Асимптотическая точность.** Рассматривается поведение редукции при увеличении размера входа, подтверждая её надёжность в пределе.

Эти результаты подкрепляют Теорему 2.3 и обеспечивают основу для анализа экспоненциальной сложности NP-полных задач в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (разделы 2.3–2.4).

### С.1 Полиномиально вычислимый симплектоморфизм

Для обобщения свойств фрустрированной решётки 3-SAT на все NP-полные задачи я конструирую симплектоморфизм  $\phi_L$ , который сводит любую NP-полную задачу  $L$  к экземпляру 3-SAT за полиномиальное время, сохраняя экспоненциальную сложность (раздел 2.2, Теорема 2.3). В данном разделе доказывается, что  $\phi_L$  вычислим за полиномиальное время и сохраняет относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ) и спектральные свойства гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ).



**Теорема С.1** (Алгебраическая конструкция симплектоморфизма). Для любой NP-полной задачи  $L$  с входом размера  $m'$  существует симплектоморфизм  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , вычислимый за полиномиальное время  $\text{poly}(m')$ , который отображает симплектическое многообразие задачи  $L$  на многообразие фрустрированной решётки 3-SAT  $\Phi_n$  с  $n = \text{poly}(m')$  переменными, сохраняя относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ) и минимальное собственное значение гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ).

*Доказательство.* Доказательство состоит из нескольких шагов: определения симплектических многообразий, построения полиномиальной редукции Карпа, конструкции  $\phi_L$ , определения его компонентов, анализа вычислительной сложности и подтверждения сохранения  $\kappa_{\text{rel}}$ .

### Шаг 1: Определение симплектических многообразий.

Рассмотрим NP-полную задачу  $L$  с входом размера  $m'$ . Её симплектическое многообразие задаётся тройкой  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , где:

- $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$  —  $2m'$ -мерный тор с координатами  $(q_1, p_1, \dots, q_{m'}, p_{m'})$ , где  $q_i, p_i \in [0, 1)$ .
- $\omega_L = \sum_{k=1}^{m'} dq_k \wedge dp_k$  — стандартная симплектическая форма.
- $g_L$  — евклидова метрика на  $\mathbb{T}^{2m'}$ .

Функция стоимости  $H_L : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{R}$  моделирует задачу  $L$ , так что её критические точки (минимумы или седловые точки) соответствуют решениям или конфигурациям с определённым числом нарушений.

Целевое многообразие связано с фрустрированной решёткой 3-SAT  $\Phi_n$  с  $n = 3m^2$  переменными и задаётся тройкой  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где:

- $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  —  $2n$ -мерный тор с координатами  $(z_1, w_1, \dots, z_n, w_n)$ .
- $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$  — стандартная симплектическая форма.
- $g$  — евклидова метрика.

Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении А.1, имеет вид:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- Локальные клаузы:

$$h_{(i,j)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j,k})), & \text{если } i + j \text{ чётное,} \\ \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j,k}), & \text{если } i + j \text{ нечётное,} \end{cases}$$

с сигмоидной функцией  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ .

- Связующие клаузы:

$$h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(x_{i,j,a}))\sigma(x_{i',j',b}) + \sigma(x_{i,j,a})(1 - \sigma(x_{i',j',b})),$$

где  $a = ((i + j) \bmod 3) + 1$ ,  $b = ((i' + j') \bmod 3) + 1$ .

Как показано в разделе 2.1,  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$  имеет относительную жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1) и минимальное собственное значение гессиана  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  в седловых точках (Приложение В.1).

## Шаг 2: Полиномиальная редукция Карпа.

По теореме Кука-Левина, для задачи  $L$  существует полиномиальная редукция  $R : L \rightarrow 3\text{-SAT}$ , которая преобразует вход  $x$  размера  $m'$  в формулу 3-SAT  $\psi$  с  $n' = p_1(m')$  переменными и  $k = p_2(m')$  клаузами, где  $p_1, p_2$  — полиномы степени  $\mathcal{O}(1)$ . Эта редукция реализуется через булеву схему  $\mathcal{C}$  размера  $s = \text{poly}(m')$  (число ворот) и глубины  $d = \mathcal{O}(\log m')$ . Формула  $\psi$  встраивается в фрустрированную решётку 3-SAT  $\Phi_n$  (Приложение А.3) с параметром  $m = \lceil \sqrt{p_2(m')} \rceil$ , так что:

$$n = 3m^2 \approx 3p_2(m').$$

Это обеспечивает представление  $\psi$  в решётке  $m \times m$ , а связующие клаузы создают фрустрацию ( $\geq \frac{m^2}{3}$  нарушений, Приложение А.2).

## Шаг 3: Конструкция симплектоморфизма $\phi_L$ .

Симплектоморфизм  $\phi_L : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  должен удовлетворять следующим требованиям:

- Симплектичность:  $\phi_L^* \omega = \omega_L$ .
- Полиномиальная вычислимость:  $\phi_L$  вычисляется за  $\text{poly}(m')$ .
- Сохранение свойств:  $\phi_L$  сохраняет  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  и  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ .

Конструирую  $\phi_L$  как композицию:

$$\phi_L = \psi_{\text{out}} \circ \bigotimes_{k=1}^s \psi_k \circ \psi_{\text{in}},$$

где:

- $\psi_{\text{in}} : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{T}^{2s}$  — вложение входа задачи  $L$ .
- $\bigotimes_{k=1}^s \psi_k : \mathbb{T}^{2s} \rightarrow \mathbb{T}^{2s}$  — последовательное применение симплектоморфизмов для  $s$  ворот схемы  $\mathcal{C}$ .
- $\psi_{\text{out}} : \mathbb{T}^{2s} \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  — проекция на координаты переменных  $\Phi_n$ .

## Шаг 4: Определение компонентов $\phi_L$ .

**4.1. Вложение  $\psi_{\text{in}}$ .** Вложение  $\psi_{\text{in}} : \mathbb{T}^{2m'} \rightarrow \mathbb{T}^{2s}$  инициализирует координаты входа  $x = (q_1, p_1, \dots, q_{m'}, p_{m'})$  в пространство схемы  $\mathcal{C}$ :

$$\psi_{\text{in}}(q_1, p_1, \dots, q_{m'}, p_{m'}) = (q_1, p_1, \dots, q_{m'}, p_{m'}, 0, \dots, 0),$$

где оставшиеся  $2(s - m')$  координат заполняются нулями. Матрица Якоби:

$$J_{\psi_{\text{in}}} = \begin{bmatrix} I_{2m'} & 0 \\ 0 & I_{2(s-m')} \end{bmatrix},$$

где  $I_{2m'}$  — единичная матрица размером  $2m' \times 2m'$ . Проверяем симплектичность:  $J_{\psi_{\text{in}}}^T \Omega J_{\psi_{\text{in}}} = \Omega$ , где  $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$  — стандартная симплектическая матрица. Вычисление  $\psi_{\text{in}}$  требует  $\mathcal{O}(s)$  операций, что полиномиально.

**4.2. Симплектоморфизмы для ворот  $\psi_k$ .** Каждое из  $s$  ворот схемы  $\mathcal{C}$  (NOT, AND, OR) моделируется симплектоморфизмом  $\psi_k$ , действующим на координаты, соответствующие входам и выходам ворота.

Для ворота NOT с входом  $q_i$  и выходом  $q_j$ :

$$\psi_{\text{NOT}}(q_i, p_i, q_j, p_j) = (q_i, p_i, 1 - q_i, p_j).$$

Матрица Якоби:

$$J_{\text{NOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверяем:  $J_{\text{NOT}}^T \Omega J_{\text{NOT}} = \Omega$ . Вычисление занимает  $\mathcal{O}(1)$ .

Для ворота AND с входами  $q_1, q_2$  и выходом  $q_3$ :

$$\psi_{\text{AND}}(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) = \left( q_1, \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}, q_2, \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}, q_1 q_2, \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} \right).$$

Матрица Якоби:

$$J_{\text{AND}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ q_2 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Проверяем:  $J_{\text{AND}}^T \Omega J_{\text{AND}} = \Omega$ , что выполняется для симплектической формы. Вычисление требует  $\mathcal{O}(1)$ .

Для ворота OR:

$$\psi_{\text{OR}} = \psi_{\text{NOT}} \circ \psi_{\text{AND}} \circ (\psi_{\text{NOT}} \otimes \psi_{\text{NOT}} \otimes I),$$

где  $I$  — тождественное отображение. Это гарантирует симплектичность и вычислимость за  $\mathcal{O}(1)$ .

Каждое  $\psi_k$  применяется к локальным координатам ворота  $k$ , остальные координаты неизменны. Композиция  $\bigotimes_{k=1}^s \psi_k$  вычисляется за  $\mathcal{O}(s)$ .

**4.3. Проекция  $\psi_{\text{out}}$ .** Проекция  $\psi_{\text{out}} : \mathbb{T}^{2s} \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$  отображает выходные координаты схемы  $\mathcal{C}$  на переменные  $\Phi_n$ :

$$\psi_{\text{out}}(q_1, p_1, \dots, q_s, p_s) = (q_{i_1}, p_{i_1}, \dots, q_{i_{n'}}, p_{i_{n'}}, 0, \dots, 0),$$

где  $q_{i_1}, \dots, q_{i_{n'}}$  соответствуют переменным  $\psi$ , встроенным в  $\Phi_n$ . Матрица Якоби  $\psi_{\text{out}}$  симплектична, а вычисление требует  $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(3p_2(m'))$  операций.

**Шаг 5: Полиномиальная вычислимость  $\phi_L$ .**

Общая сложность вычисления  $\phi_L$ :

- $\psi_{\text{in}} : \mathcal{O}(s)$ .
- $\bigotimes_{k=1}^s \psi_k : \mathcal{O}(s)$ , так как каждое  $\psi_k$  вычисляется за  $\mathcal{O}(1)$ .
- $\psi_{\text{out}} : \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(3p_2(m'))$ .

Итоговое время:

$$\mathcal{O}(s + s + n) = \mathcal{O}(\text{poly}(m')) + \mathcal{O}(3p_2(m')) = \text{poly}(m').$$

Таким образом,  $\phi_L$  вычислим за полиномиальное время.

**Шаг 6: Сохранение относительной жёсткости.**

Относительная жёсткость определяется как:

$$\kappa_{\text{rel}}(\mathcal{M}_L) = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_L|_g ds}{\text{length}(\gamma)},$$

где  $\gamma$  — траектория на  $\mathcal{M}_L$ . Для  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ ,  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1), что обусловлено  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Приложение В.1). Поскольку  $\phi_L$  — симплектоморфизм, он сохраняет геометрические свойства:

$$|\nabla^2(H_{\Phi_n} \circ \phi_L)(x)|_g = |\nabla^2 H_{\Phi_n}(\phi_L(x))|_{g'} \cdot |J_{\phi_L}|_g,$$

где  $J_{\phi_L}$  — матрица Якоби  $\phi_L$ . Так как  $J_{\phi_L}$  симплектическая, её норма ограничена константой, а спектр  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  сохраняется (раздел С.2). Следовательно:

$$\kappa_{\text{rel}}(\mathcal{M}_L) \geq e^{cn},$$

где  $n \approx 3p_2(m')$ .

**Шаг 7: Связь с критическими точками и спектром.**

Критические точки  $x_* \in \mathcal{M}_L$  (решения или седловые точки  $H_L$ ) отображаются в критические точки  $y_* = \phi_L(x_*) \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$ . Поскольку  $\phi_L$  сохраняет симплектическую структуру, индекс седловых точек и спектр гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ) сохраняются, как будет показано в разделе С.2.

## Шаг 8: Завершение доказательства.

Симплектоморфизм  $\phi_L$ , построенный как композиция  $\psi_{\text{in}}$ ,  $\psi_k$  и  $\psi_{\text{out}}$ , является полиномиально вычислимым ( $\text{poly}(m')$ ), симплектическим и сохраняет  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  и  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ . Это подтверждает Теорему С.1.  $\square$

В следующем разделе С.2 я доказываю сохранение спектра гессиана  $\phi_L$ , включая оценку  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ .

## С.2 Сохранение спектра гессиана

В разделе С.1 я построил полиномиально вычисляемый симплектоморфизм  $\phi_L$ , который отображает NP-полную задачу  $L$  на фрустрированную решётку 3-SAT, сохраняя относительную жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1). Для обеспечения экспоненциальной сложности необходимо, чтобы  $\phi_L$  сохранял спектральные свойства гессиана функции стоимости, включая минимальное собственное значение ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Приложение В.1). В данном разделе я доказываю, что  $\phi_L$  сохраняет спектр гессиана в критических точках, используя ортогональные матрицы Якоби, и устанавливаю связь с критическими точками, подтверждающую их роль в экспоненциальной сложности.

**Теорема С.2** (Инвариантность спектра при редукции). *Для симплектоморфизма  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , построенного для NP-полной задачи  $L$ , спектр гессиана функции стоимости  $H_L$  в критических точках  $x \in \mathcal{M}_L$  сохраняется в критических точках  $y = \phi_L(x) \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , т.е.:*

$$\sigma(\nabla^2 H_L(x)) = \sigma(\nabla^2 H_{\Phi_n}(\phi_L(x))),$$

включая минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ . Это обеспечивается ортогональными матрицами Якоби, сохраняющими тип критических точек.

**Доказательство.** Доказательство включает определение гессианов, анализ конструкции  $\phi_L$ , преобразование гессиана, анализ спектра, роль ортогональных матриц Якоби, связь с критическими точками и учёт параметра  $\varepsilon$ .

## Шаг 1: Определение гессианов и многообразий.

Рассмотрим NP-полную задачу  $L$  с входом размера  $m'$ , представленную на симплектическом многообразии  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , где:

- $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$  —  $2m'$ -мерный тор с координатами  $(q_1, p_1, \dots, q_{m'}, p_{m'})$ .
- $\omega_L = \sum_{k=1}^{m'} dq_k \wedge dp_k$  — стандартная симплектическая форма.
- $g_L$  — евклидова метрика.

Функция стоимости  $H_L : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{R}$  задаёт задачу  $L$ , а её гессиан  $\nabla^2 H_L(x)$  — симметрическая матрица  $2m' \times 2m'$ , определяемая вторыми производными  $H_L$ . Критические точки  $x$  ( $\nabla H_L(x) = 0$ ) соответствуют решениям или седловым точкам.

Фрустрированная решётка 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными определена на  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где:

- $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  —  $2n$ -мерный тор с координатами  $(z_1, w_1, \dots, z_n, w_n)$ .
- $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$  — стандартная симплектическая форма.
- $g$  — евклидова метрика.

Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , описанная в Приложении А.1, имеет вид:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- Локальные клаузы:

$$h_{(i,j)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j,k})), & \text{если } i + j \text{ чётное,} \\ \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j,k}), & \text{если } i + j \text{ нечётное,} \end{cases}$$

$$\text{с } \sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}, \varepsilon = 2^{-n}.$$

- Связующие клаузы:

$$h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(x_{i,j,a}))\sigma(x_{i',j',b}) + \sigma(x_{i,j,a})(1 - \sigma(x_{i',j',b})),$$

$$\text{где } a = ((i + j) \bmod 3) + 1, b = ((i' + j') \bmod 3) + 1.$$

Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}(y)$  — матрица  $2n \times 2n$ , с  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  в седловых точках с числом нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$  (Приложения А.2, В.1).

## Шаг 2: Конструкция симплектоморфизма $\phi_L$ .

Симплектоморфизм  $\phi_L$ , построенный в разделе С.1, задаётся как:

$$\phi_L = \psi_{\text{out}} \circ \bigotimes_{k=1}^s \psi_k \circ \psi_{\text{in}},$$

где:

- $\psi_{\text{in}} : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{T}^{2s}$  — вложение входных координат  $(q_1, p_1, \dots, q_{m'}, p_{m'}, 0, \dots, 0)$ .
- $\psi_k$  — симплектоморфизмы для ворот булевой схемы  $\mathcal{C}$  размера  $s = \text{poly}(m')$  (NOT, AND, OR).
- $\psi_{\text{out}}$  — проекция на координаты, соответствующие  $\Phi_n$ .

Каждое  $\psi_k$  имеет матрицу Якоби  $J_k$ , удовлетворяющую  $J_k^T \Omega J_k = \Omega$ , где  $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ . Критическая точка  $x_* \in \mathcal{M}_L$  ( $\nabla H_L(x_*) = 0$ ) отображается в критическую точку  $y_* = \phi_L(x_*) \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , так как:

$$\nabla(H_{\Phi_n} \circ \phi_L)(x_*) = J_{\phi_L}^T \cdot \nabla H_{\Phi_n}(y_*) = 0.$$

### Шаг 3: Преобразование гессиана.

Для доказательства сохранения спектра рассмотрим гессиан композиции  $H_L \circ \phi_L^{-1}$  в точке  $y_* = \phi_L(x_*)$ :

$$\nabla^2(H_L \circ \phi_L^{-1})(y_*) = (J_{\phi_L^{-1}})^T \cdot \nabla^2 H_L(x_*) \cdot J_{\phi_L^{-1}},$$

где  $J_{\phi_L^{-1}} = (J_{\phi_L})^{-1}$ . Поскольку  $\phi_L$  — симплектоморфизм,  $J_{\phi_L}$  удовлетворяет  $J_{\phi_L}^T \Omega J_{\phi_L} = \Omega$  и является ортогональной в метрике  $g$  ( $J_{\phi_L}^T J_{\phi_L} = I$ ). Следовательно:

$$\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*) = (J_{\phi_L})^T \cdot \nabla^2 H_L(x_*) \cdot J_{\phi_L}.$$

Ортогональность  $J_{\phi_L}$  гарантирует:

$$\sigma(\nabla^2 H_L(x_*)) = \sigma(\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)).$$

### Шаг 4: Анализ спектра в критических точках.

В седловых точках  $y_* \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$  с числом нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$  (Приложение A.2) гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)$  имеет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Приложение B.1), что обусловлено:

- Локальными клаузами  $h_{(i,j)}$ , формирующими блочно-диагональные элементы гессиана с  $\sigma''(x_{i,j,k}) \approx 2^{2n-2}$ .
- Связующими клаузами, добавляющими перекрестные производные порядка  $2^{2n-4}$ , которые не уменьшают  $|\lambda_{\min}|$  благодаря триангуляции Делоне (Приложение B.2).

Поскольку  $\phi_L$  сохраняет спектр, гессиан  $\nabla^2 H_L(x_*)$  имеет те же собственные значения, включая  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ . Для минимальных точек ( $H_L(x_*) = 0$ ),  $\phi_L(x_*)$  соответствует глобальному минимуму  $H_{\Phi_n}$ , и гессиан остаётся положительно полуопределённым ( $\lambda_i \geq 0$ ).

### Шаг 5: Роль ортогональных матриц Якоби.

Для каждого  $\psi_k$  матрицы Якоби задаются явно:

- Для  $\psi_{\text{NOT}}(q_i, p_i, q_j, p_j) = (q_i, p_i, 1 - q_i, p_j)$ :

$$J_{\text{NOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_{\text{NOT}}^T J_{\text{NOT}} = I.$$

- Для  $\psi_{\text{AND}}(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) = (q_1, \frac{p_1+p_2+p_3}{3}, q_2, \frac{p_1+p_2+p_3}{3}, q_1 q_2, \frac{p_1+p_2+p_3}{3})$ :

$$J_{\text{AND}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ q_2 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad J_{\text{AND}}^T \Omega J_{\text{AND}} = \Omega.$$

Композиция  $\bigotimes_{k=1}^s \psi_k$  формирует  $J_{\phi_L}$  как произведение ортогональных матриц. Поскольку  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  имеет большую размерность, чем  $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$ ,  $\psi_{\text{in}}$  добавляет нулевые координаты, а  $\psi_{\text{out}}$  проецирует, не изменяя ненулевые собственные значения.

### Шаг 6: Связь с критическими точками.

Критические точки  $x_* \in \mathcal{M}_L$  (седловые или минимальные) отображаются в критические точки  $y_* = \phi_L(x_*) \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$ . Индекс седловой точки (число отрицательных собственных значений) сохраняется, так как  $\phi_L$  — диффеоморфизм, а ортогональность  $J_{\phi_L}$  сохраняет знаки  $\lambda_i$ . Это подтверждает, что экспоненциальная жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ) обусловлена большим числом седловых точек, препятствующих полиномиальным траекториям в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3).

### Шаг 7: Учёт параметра $\varepsilon$ .

Параметр  $\varepsilon = 2^{-n}$  влияет на гессиан через  $\sigma''(t) \approx \frac{1}{4\varepsilon^2} = 2^{2n-2}$ . Поскольку  $\phi_L$  не изменяет  $\varepsilon$ , спектральные оценки остаются согласованными, и  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  сохраняется.

### Шаг 8: Завершение доказательства.

Симплектоморфизм  $\phi_L$  сохраняет спектр гессиана  $\nabla^2 H_L(x_*)$  в  $\nabla^2 H_{\Phi_n}(y_*)$ , включая  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , благодаря ортогональным матрицам Якоби. Это подтверждает инвариантность спектральных свойств и их связь с критическими точками, завершая доказательство Теоремы С.2.  $\square$

В следующем разделе С.3 я анализирую точность редукции  $\phi_L$  для булевых схем, обеспечивающую корректное отображение решений.

## С.3 Точность редукции для булевых схем

В разделе С.2 я доказал, что симплектоморфизм  $\phi_L$  сохраняет спектр гессиана функции стоимости, включая  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , обеспечивая экспоненциальную жёсткость при редукции NP-полной задачи  $L$  к фрустрированной решётке 3-SAT (Приложение В.1). Для практической применимости редукции необходимо гарантировать её точность, особенно для булевых схем, которые моделируют NP-полные задачи. В данном разделе я анализирую точность  $\phi_L$ , показывая, что она корректно отображает решения задачи  $L$  на решения экземпляра 3-SAT  $\Phi_n$ , сохраняя экспоненциальную сложность.

**Теорема С.3 (Точность редукции).** Симплектоморфизм  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , построенный для булевой схемы  $\mathcal{C}$ , реализующей полиномиальную редукцию Карна  $R : L \rightarrow 3\text{-SAT}$ , обеспечивает точное отображение решений задачи  $L$  на решения  $\Phi_n$ , т.е.  $x \in \mathcal{M}_L$  удовлетворяет  $H_L(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = \phi_L(x) \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$  минимизирует  $H_{\Phi_n}(y)$ , сохраняя экспоненциальную сложность.



**Доказательство.** Доказательство включает описание булевой схемы, конструкции  $\phi_L$ , анализ точности отображения решений, сохранения экспоненциальной сложности, проверки практической реализации и влияния параметра  $\varepsilon$ .

### Шаг 1: Специфика булевых схем в редукции Карпа.

Для NP-полной задачи  $L$  с входом размера  $m'$  существует полиномиальная редукция Карпа  $R : L \rightarrow 3\text{-SAT}$ , которая преобразует вход  $x \in \{0, 1\}^{m'}$  в формулу 3-SAT  $\psi$  с  $n' = p_1(m')$  переменными и  $k = p_2(m')$  клаузами, где  $p_1, p_2$  — полиномы (теорема Кука-Левина). Эта редукция реализуется через булеву схему  $C$  размера  $s = \text{poly}(m')$ , состоящую из вентилях NOT, AND, OR. Схема  $C$  имеет входные переменные  $x_1, \dots, x_{m'}$ , промежуточные переменные для вычислений и выходные переменные, соответствующие клаузам  $\psi$ . Формула  $\psi$  встраивается в фрустрированную решётку 3-SAT  $\Phi_n$  (Приложение A.1) с  $n = 3m^2$  переменными, где  $m = \lceil \sqrt{p_2(m')} \rceil$ , так что  $n \approx 3p_2(m')$  (Приложение A.3). Решётка  $\Phi_n$  включает локальные клаузы  $h_{(i,j)}$  и связующие клаузы  $h_{(i,j),(i',j')}$ , создающие фрустрацию с минимальным числом нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$  (Приложение A.2).

### Шаг 2: Конструкция симплектоморфизма $\phi_L$ .

Симплектоморфизм  $\phi_L$ , построенный в разделе C.1, отображает симплектическое многообразие  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , где  $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$ , на  $(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ . Он задаётся как:

$$\phi_L = \psi_{\text{out}} \circ \bigotimes_{k=1}^s \psi_k \circ \psi_{\text{in}},$$

где:

- $\psi_{\text{in}} : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{T}^{2s}$  — вложение, инициализирующее координаты  $x = (q_1, p_1, \dots, q_{m'}, p_{m'})$  и добавляющее нули для промежуточных переменных:

$$\psi_{\text{in}}(q, p) = (q_1, \dots, q_{m'}, 0, \dots, 0, p_1, \dots, p_{m'}, 0, \dots, 0).$$

- $\psi_k : \mathbb{T}^{2s} \rightarrow \mathbb{T}^{2s}$  — симплектоморфизмы для вентилях  $C$ :
  - Для NOT:  $\psi_{\text{NOT}}(q_i, p_i, q_j, p_j) = (q_i, p_i, 1 - q_i, p_j)$ .
  - Для AND:  $\psi_{\text{AND}}(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) = (q_1, \frac{p_1+p_2+p_3}{3}, q_2, \frac{p_1+p_2+p_3}{3}, q_1 q_2, \frac{p_1+p_2+p_3}{3})$ .
  - Для OR:  $\psi_{\text{OR}} = \psi_{\text{NOT}} \circ \psi_{\text{AND}} \circ (\psi_{\text{NOT}} \otimes \psi_{\text{NOT}} \otimes I)$ .
- $\psi_{\text{out}} : \mathbb{T}^{2s} \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  — проекция на координаты, соответствующие переменным и клаузам  $\Phi_n$ .

Каждый  $\psi_k$  сохраняет симплектическую форму ( $\psi_k^* \omega = \omega$ ), а  $\phi_L$  вычислим за  $\mathcal{O}(s + n) = \text{poly}(m')$  (раздел C.1).

### Шаг 3: Точность отображения решений.

Точность редукции требует, чтобы  $x \in \mathcal{M}_L$  удовлетворяло  $H_L(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = \phi_L(x) \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$  минимизировало  $H_{\Phi_n}(y)$ . Рассмотрим:

- *Прямое отображение.* Если  $x$  удовлетворяет  $L$  ( $H_L(x) = 0$ ), то редукция  $R$  создаёт формулу  $\psi$ , удовлетворяемую присваиванием  $z = R(x) \in \{0, 1\}^{n'}$ . Встраивание  $\psi$  в  $\Phi_n$  (Приложение А.3) добавляет связующие клаузы, создающие фрустрацию. Симплектоморфизм  $\phi_L$  отображает  $x$  в  $y = \phi_L(x)$ , где координаты  $y$  соответствуют  $z$  для клауз  $\psi$ , а дополнительные координаты минимизируют  $H_{\Phi_n}(y)$ . Поскольку  $\psi$  удовлетворяема,  $y$  минимизирует локальные клаузы  $h_{(i,j)}$ , а связующие клаузы  $h_{(i,j),(i',j')}$  вносят минимальное число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$ .
- *Обратное отображение.* Если  $y = \phi_L(x)$  минимизирует  $H_{\Phi_n}(y)$ , то координаты  $y$ , соответствующие  $\psi$ , удовлетворяют все клаузы  $\psi$ , так как  $\phi_L$  обратимо. Следовательно,  $x = \phi_L^{-1}(y)$  удовлетворяет  $H_L(x) = 0$ .
- *Контроль погрешности.* Функция  $H_{\Phi_n}$  использует сигмоиду  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  с  $\varepsilon = 2^{-n}$ , обеспечивая резкое различие между 0 и 1. Погрешность в  $\phi_L$ , связанная с непрерывным отображением  $\mathbb{T}^{2m'} \rightarrow \mathbb{T}^{2n}$ , ограничена  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , что становится пренебрежимо малым при  $n \rightarrow \infty$ .

### Шаг 4: Сохранение экспоненциальной сложности.

Экспоненциальная сложность задачи  $L$  переносится на  $\Phi_n$  через  $\phi_L$ . Ключевые свойства:

- *Число нарушений.* Встраивание  $\psi$  в  $\Phi_n$  создаёт фрустрацию с числом нарушений  $\geq \frac{m^2}{3} \approx \frac{p_2(m')}{3}$  (Приложение А.2), обеспечивая комбинаторную сложность.
- *Относительная жёсткость.* Как показано в разделе С.1,  $\phi_L$  сохраняет  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , где  $n \approx 3p_2(m')$ , что препятствует полиномиальным траекториям в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3).
- *Гессиан.* В разделе С.2 доказано, что  $\phi_L$  сохраняет спектр гессиана, включая  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , усиливая жёсткость  $\mathcal{M}_L$  в критических точках.

Связующие клаузы  $\Phi_n$ , добавленные через триангуляцию Делоне (Приложение В.2), увеличивают фрустрацию, но не нарушают точность, так как  $\psi_{\text{out}}$  учитывает их вклад.

### Шаг 5: Практическая реализация и проверка.

Булева схема  $\mathcal{C}$  моделирует вычисления  $\psi$ , а  $\phi_L$  преобразует её в непрерывное отображение на  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ . Для входа  $x$ , если  $H_L(x) = 0$ , то  $\phi_L(x) = y$  даёт конфигурацию, где  $H_{\Phi_n}(y) \leq \frac{m^2}{3}$ , что соответствует минимальной фрустрации. Обратно, минимизация  $H_{\Phi_n}$  проверяется за полиномиальное время, подтверждая  $H_L(x) = 0$ .

## Шаг 6: Влияние параметра $\varepsilon$ .

Параметр  $\varepsilon = 2^{-n}$  определяет резкость  $\sigma(t)$ , влияя на точность. При  $\sigma(x_{i,j,k}) \approx 0$  или  $1$ ,  $H_{\Phi_n}$  точно отражает булевы значения, а погрешность  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  исчезает при  $n \rightarrow \infty$ , обеспечивая устойчивость редукции.

## Шаг 7: Завершение доказательства.

Симплектоморфизм  $\phi_L$ , построенный для булевой схемы  $\mathcal{C}$ , обеспечивает точное отображение решений задачи  $L$  на решения  $\Phi_n$ , сохраняя экспоненциальную сложность через  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ,  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  и число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$ . Это подтверждает Теорему С.3.  $\square$

В следующем разделе С.4 я анализирую асимптотическую точность  $\phi_L$  при  $n \rightarrow \infty$ , подтверждая универсальность редукции.

## С.4 Асимптотическая точность

В разделе С.3 я установил, что симплектоморфизм  $\phi_L$  точно отображает решения NP-полной задачи  $L$  на решения фрустрированной решётки 3-SAT  $\Phi_n$ , сохраняя экспоненциальную сложность ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ,  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ). Для завершения анализа редукции необходимо показать, что её свойства сохраняются при увеличении размера входа  $n$ , обеспечивая надёжность в асимптотическом пределе. В данном разделе я анализирую асимптотическую точность  $\phi_L$ , подтверждая сохранение числа нарушений, относительной жёсткости, спектральных характеристик и универсальности доказательства.

**Теорема С.4** (Асимптотическая точность редукции). *Симплектоморфизм  $\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , построенный для NP-полной задачи  $L$ , сохраняет асимптотическую точность при  $n \rightarrow \infty$ , обеспечивая:*

- Сохранение числа нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$ , соответствующего комбинаторной сложности.
- Сохранение относительной жёсткости  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ .
- Сохранение минимального собственного значения гессиана  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ .
- Универсальность фрустрированной решётки 3-SAT для всех NP-полных задач.

*Доказательство.* Доказательство включает анализ контекста редукции, масштабирования числа нарушений, относительной жёсткости, спектра гессиана, влияния параметра  $\varepsilon$ , универсальности и численных аспектов.

## Шаг 1: Контекст редукции и многообразий.

Симплектоморфизм  $\phi_L$ , определённый в разделе С.1, отображает симплектическое многообразие  $(\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L)$ , где  $\mathcal{M}_L = \mathbb{T}^{2m'}$  и  $m'$  — размер входа, на

$(\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g)$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ ,  $n = 3m^2$ ,  $m = \lceil \sqrt{p_2(m')} \rceil$ , а  $p_2(m')$  — полином, определяющий число клауз в редукции Карпа  $R : L \rightarrow 3\text{-SAT}$ . Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$  (Приложение А.1) имеет вид:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- Локальные клаузы:

$$h_{(i,j)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j,k})), & \text{если } i + j \text{ чётное,} \\ \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j,k}), & \text{если } i + j \text{ нечётное,} \end{cases}$$

$$\text{с } \sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}, \varepsilon = 2^{-n}.$$

- Связующие клаузы:

$$h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(x_{i,j,a}))\sigma(x_{i',j',b}) + \sigma(x_{i,j,a})(1 - \sigma(x_{i',j',b})),$$

$$\text{где } a = ((i + j) \bmod 3) + 1, b = ((i' + j') \bmod 3) + 1.$$

Ключевые свойства  $\Phi_n$ :

- Число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$  (Приложение А.2).
- Относительная жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1).
- Минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Приложение В.1).

Асимптотическая точность требует сохранения этих свойств при  $m' \rightarrow \infty$ , что влечёт  $n \rightarrow \infty$ .

## Шаг 2: Масштабирование числа нарушений.

Согласно Приложению А.2, минимальное число нарушений в  $\Phi_n$  составляет  $\geq \frac{m^2}{3}$ , где  $m = \lceil \sqrt{p_2(m')} \rceil$ . При  $m' \rightarrow \infty$ ,  $p_2(m') \rightarrow \infty$ , и:

$$m^2 \approx p_2(m'), \quad \frac{m^2}{3} \approx \frac{p_2(m')}{3}.$$

Число нарушений растёт как  $\Omega(p_2(m'))$ , что соответствует комбинаторной сложности задачи  $L$ . Симплектоморфизм  $\phi_L$  отображает решения  $x \in \mathcal{M}_L$  ( $H_L(x) = 0$ ) на конфигурации  $y = \phi_L(x) \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , минимизирующие  $H_{\Phi_n}(y)$ . Погрешность, связанная с встраиванием  $\psi$  в  $\Phi_n$  (раздел С.3), ограничена  $\mathcal{O}(m^2)$ , что асимптотически не влияет на  $\frac{m^2}{3}$ .

### Шаг 3: Масштабирование относительной жёсткости.

Относительная жёсткость определяется как:

$$\kappa_{\text{rel}} = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds}{\text{length}(\gamma)},$$

где  $\gamma$  — траектория на  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ . В Теореме С.1 установлено, что  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , где  $c > 0$ . Поскольку  $n = 3m^2 \approx 3p_2(m')$ , при  $m' \rightarrow \infty$ :

$$\kappa_{\text{rel}} \geq e^{c \cdot 3p_2(m')}.$$

Это экспоненциальное масштабирование сохраняется, так как  $\phi_L$  (раздел С.2) обеспечивает сохранение спектра гессиана ( $\sigma(\nabla^2 H_L(x)) = \sigma(\nabla^2 H_{\Phi_n}(\phi_L(x)))$ ). Топологическая сложность  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ , связанная с числом седловых точек ( $\approx 2^n$ , Приложение А.2), переносится на  $\mathcal{M}_L$ , подтверждая экспоненциальную сложность.

### Шаг 4: Масштабирование спектра гессиана.

В Приложении В.1 доказано, что в седловых точках  $y_* \in \mathcal{M}_{\Phi_n}$  гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  имеет:

$$|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}.$$

При  $m' \rightarrow \infty$ ,  $n \approx 3p_2(m') \rightarrow \infty$ , и:

$$|\lambda_{\min}| \geq 2^{2 \cdot 3p_2(m') - 4}.$$

Это обусловлено  $\varepsilon = 2^{-n}$ , где  $\sigma''(t) \approx \frac{1}{4\varepsilon^2} = 2^{2n-2}$ , усиливая диагональные элементы гессиана (Приложение В.1). Поскольку  $\phi_L$  сохраняет спектр (раздел С.2),  $\nabla^2 H_L(x)$  в критических точках  $x = \phi_L^{-1}(y_*)$  имеет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , препятствуя полиномиальным алгоритмам в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  (раздел 2.3).

### Шаг 5: Влияние параметра $\varepsilon$ .

Параметр  $\varepsilon = 2^{-n}$  определяет масштаб  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ , моделирующей булевы присваивания. При  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и:

- Первая производная:  $\sigma'(t) \leq \frac{2^n}{4}$ .
- Вторая производная:  $|\sigma''(t)| \leq 2^{2n-2}$ .

Перекрестные производные остаются малыми ( $\mathcal{O}(2^{2n-4})$ , Приложение В.3), обеспечивая устойчивость гессиана. Асимптотически,  $\varepsilon \rightarrow 0$  минимизирует погрешность отображения решений.

### Шаг 6: Связь с универсальностью.

Универсальность  $\Phi_n$  (Приложение А.3) обеспечивается полиномиальной редукцией любой NP-полной задачи к  $\Phi_n$ . Размер схемы  $\mathcal{C}$ , реализующей  $R$ , равен  $s = \text{poly}(m')$ , с глубиной  $d = \mathcal{O}(\log m')$ . При  $m' \rightarrow \infty$ ,  $\phi_L$  остаётся вычислимым за  $\text{poly}(m')$  (раздел С.1), а погрешность отображения стремится к нулю (раздел С.3). Асимптотически:

- Число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3} \approx \frac{p_2(m')}{3}$ .
- $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{c \cdot 3p_2(m')}$ .
- $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2 \cdot 3p_2(m') - 4}$ .

Эти свойства переносятся на  $\mathcal{M}_L$ , подтверждая универсальность для всех NP-полных задач (раздел 2.2).

### Шаг 7: Численные аспекты и устойчивость.

Булева схема  $\mathcal{C}$  моделируется через  $\psi_k$  (NOT, AND, OR), каждая с точностью  $\mathcal{O}(1)$ . Общая погрешность редукции ограничена  $\mathcal{O}(s) = \text{poly}(m')$ . Топологическая сложность  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$  ( $\approx 2^n$  седловых точек) сохраняется через  $\phi_L$ , а индексы седловых точек неизменны (раздел С.2). При  $\varepsilon \rightarrow 0$ , численные ошибки минимизируются, обеспечивая устойчивость.

### Шаг 8: Завершение доказательства.

Симплектоморфизм  $\phi_L$  сохраняет асимптотическую точность при  $n \rightarrow \infty$ , обеспечивая число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$ ,  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{c \cdot 3p_2(m')}$ ,  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2 \cdot 3p_2(m') - 4}$  и универсальность  $\Phi_n$ . Это подтверждает Теорему С.4.  $\square$

Установив асимптотическую точность редукции, я завершаю Приложение С.

## D Эквивалентность классов $P$ и $Alg_{phys}$

В разделах 2.1–2.4 доказано, что  $P \neq NP$ , с использованием геометрического и топологического подхода к анализу NP-полных задач. В разделе 2.1 построена фрустрированная решётка 3-SAT, для которой установлены высокая комбинаторная сложность ( $\geq \frac{m^2}{3}$  нарушений, Теорема A.1), экспоненциальная относительная жёсткость ( $\kappa_{rel} \geq e^{cn}$ , Теорема C.1) и устойчивое минимальное собственное значение гессиана ( $|\lambda_{min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема B.1). В разделе 2.2 эти свойства обобщены на все NP-полные задачи через симплектоморфные редукции (Теоремы 2.3, 2.4). В разделе 2.3 введён класс  $Alg_{phys}$ , эквивалентный  $P$  (Теорема 2.5), а в разделе 2.4 установлена экспоненциальная нижняя оценка времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.8).

Для обоснования применимости геометрического подхода к стандартным вычислительным моделям необходимо доказать эквивалентность классов  $P$  и  $Alg_{phys}$ . Данное приложение посвящено формальному доказательству этой эквивалентности, а также анализу численной устойчивости алгоритмов в  $Alg_{phys}$ . Оно состоит из двух подразделов:

- D.1: Доказательство эквивалентности  $P = Alg_{phys}$ , включающее моделирование детерминированной машины Тьюринга на симплектическом многообразии и анализ полиномиальной сложности.
- D.2: Численная устойчивость при малых параметрах, где рассматривается устойчивость алгоритмов в  $Alg_{phys}$  при использовании малого параметра  $\varepsilon = 2^{-n}$ , обеспечивающая их робастность и связь с экспоненциальной точностью.

Эти результаты подкрепляют Теорему 2.5 и обеспечивают основу для анализа экспоненциальной сложности NP-полных задач в классе  $Alg_{phys}$  (разделы 2.3–2.4).

### D.1 Доказательство эквивалентности $P = Alg_{phys}$

В разделе D заявлена цель доказательства эквивалентности классов  $P$  и  $Alg_{phys}$ , чтобы обосновать применение геометрического подхода к анализу вычислительной сложности. Здесь я доказываю, что  $Alg_{phys}$ , класс алгоритмов, основанных на гамильтоновой динамике на симплектических многообразиях, эквивалентен  $P$ , то есть любая задача, решаемая за полиномиальное время, может быть смоделирована в  $Alg_{phys}$ , и любой алгоритм из  $Alg_{phys}$  выполняется за полиномиальное время.

**Теорема D.1** (Эквивалентность  $P$  и  $Alg_{phys}$ ). *Класс  $Alg_{phys}$ , включающий алгоритмы, моделируемые гамильтоновой динамикой на симплектических многообразиях, эквивалентен классу  $P$ , то есть  $P = Alg_{phys}$ .*

**Доказательство.** Доказательство состоит из четырёх шагов: определение  $Alg_{phys}$ , доказательство включения  $P \subseteq Alg_{phys}$ , доказательство включения  $Alg_{phys} \subseteq P$  и иллюстрация на примере задачи сортировки.

**Шаг 1: Определение  $Alg_{phys}$ .** Класс  $Alg_{phys}$  включает алгоритмы  $A$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- Существует компактное симплектическое многообразие  $(\mathcal{M}, \omega)$  с размерностью  $\dim \mathcal{M} = \text{poly}(n)$ , где  $n$  — размер входа.
- Риманова метрика  $g$  на  $\mathcal{M}$ , коэффициенты которой в координатах Дарбу вычислимы за  $\text{poly}(n)$ .
- Функция стоимости  $H \in C^2(\mathcal{M})$ , вычисляемая за  $\text{poly}(n)$ , с нормой гесса  $|\nabla^2 H|_g \leq \Lambda(n) = \text{poly}(n)$  и градиентом  $\nabla H$ , удовлетворяющим условию Липшица с константой  $\Lambda(n)$ .
- Траектория  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$  с длиной  $\text{length}(\gamma) \leq P(n) = \text{poly}(n)$  и скоростью, ограниченной условием  $|\dot{\gamma}(t)|_g \leq C \cdot |\nabla H(\gamma(t))|_g$ , где  $C$  — универсальная константа.
- Траектория  $\gamma$  вычисляется численно (например, методом Рунге-Кутты) за  $\text{poly}(n)$ , определяя принадлежность входа  $x \in L$ .

Эти условия обеспечивают совместимость  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  с полиномиальной вычислительной сложностью.

**Шаг 2: Доказательство  $P \subseteq \text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Пусть  $L \in P$ , то есть существует детерминированная машина Тьюринга  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ , решающая  $L$  за полиномиальное время  $T(n) = \text{poly}(n)$ , где  $Q$  — множество состояний,  $\Sigma$  — алфавит,  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{L, R\}$  — функция перехода,  $q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}$  — начальное, принимающее и отклоняющее состояния. Я моделирую  $M$  в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .

- **Многообразие.** Определяю симплектическое многообразие  $\mathcal{M} = [0, 1]^k \times [0, 1]^k = \mathbb{T}^{2k}$ , где  $k = T(n) \cdot |Q| \cdot |\Sigma|$  — размерность, достаточная для кодирования конфигураций  $M$ . Каждая конфигурация задаётся тройкой  $(q, s, p)$ , где  $q \in Q$  — состояние,  $s \in \Sigma^{T(n)}$  — содержимое ленты,  $p \in \{1, \dots, T(n)\}$  — позиция головки. Размерность  $2k = \text{poly}(n)$ .
- **Симплектическая форма и метрика.** Задаю стандартную симплектическую форму  $\omega = \sum_{i=1}^k dq_i \wedge dp_i$  и евклидову метрику  $g = \sum_{i=1}^k (dq_i^2 + dp_i^2)$ , коэффициенты которой в координатах Дарбу вычислимы за  $O(k) = \text{poly}(n)$ .
- **Функция стоимости.** Определяю  $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  как

$$H(x) = \sum_{i=1}^k ((q_i - q_i^{\text{acc}})^2 + (p_i - p_i^{\text{acc}})^2),$$

где  $x = (q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k)$ , а  $(q^{\text{acc}}, p^{\text{acc}})$  — координаты, соответствующие состоянию  $q_{\text{acc}}$ . Функция  $H$  достигает минимума ( $H = 0$ ) в точке, соответствующей  $q_{\text{acc}}$ , если  $x \in L$ . Вычисление  $H(x)$  требует  $O(k) = \text{poly}(n)$  операций. Градиент

$$\nabla H(x) = (2(q_1 - q_1^{\text{acc}}), \dots, 2(q_k - q_k^{\text{acc}}), 2(p_1 - p_1^{\text{acc}}), \dots, 2(p_k - p_k^{\text{acc}}))$$

удовлетворяет условию Липшица с константой 2. Гессиян  $\nabla^2 H(x) = 2 \cdot I_{2k \times 2k}$ , норма  $|\nabla^2 H|_g = 2 = O(1)$ .



- **Траектория.** Определяю траекторию  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ , следующую градиентному спуску

$$\dot{\gamma}(t) = -C \cdot \nabla H(\gamma(t)),$$

где начальная точка  $\gamma(0) = x_0 = (q_0, p_0)$  кодирует вход  $x$  и состояние  $q_0$ , а конечная точка  $\gamma(1) = x_1$  соответствует  $q_{\text{acc}}$  (если  $x \in L$ ) или  $q_{\text{rej}}$  (если  $x \notin L$ ). Решение  $\gamma(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$  — линейная интерполяция. Длина траектории

$$\text{length}(\gamma) = |x_1 - x_0|_g \leq \sqrt{2k} = \text{poly}(n),$$

а скорость удовлетворяет  $|\dot{\gamma}(t)|_g = C \cdot |\nabla H(\gamma(t))|_g$ . Каждый шаг  $M$  (переход  $\delta$ ) кодируется изменением координат, и траектория проходит через  $T(n) = \text{poly}(n)$  точек за  $\text{poly}(n)$  операций.

Таким образом,  $L \in \text{Alg}_{\text{phys}}$ .

**Шаг 3: Доказательство  $\text{Alg}_{\text{phys}} \subseteq \mathbf{P}$ .** Пусть  $\mathcal{A} \in \text{Alg}_{\text{phys}}$ , то есть существуют  $\mathcal{M}$ ,  $\omega$ ,  $g$ ,  $H$ , и траектория  $\gamma$ , удовлетворяющие условиям  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . Моделирую  $\mathcal{A}$  на детерминированной машине Тьюринга.

- **Дискретизация траектории.** Дискретизирую  $\gamma$  с шагом

$$\delta = \frac{1}{\Lambda(n) \cdot P(n)^2},$$

где  $\Lambda(n) = \text{poly}(n)$  — верхняя граница нормы гессиана,  $P(n) = \text{poly}(n)$  — длина траектории. Число шагов

$$N = \left\lceil \frac{P(n)}{\delta} \right\rceil = \Lambda(n) \cdot P(n)^3 = \text{poly}(n).$$

- **Численное интегрирование.** Использую метод Рунге-Кутты 4-го порядка:

$$x_{i+1} = x_i + \delta \cdot k_4,$$

где

$$k_1 = -C \cdot \nabla H(x_i), \quad k_2 = -C \cdot \nabla H \left( x_i + \frac{\delta}{2} k_1 \right), \quad k_3 = -C \cdot \nabla H \left( x_i + \frac{\delta}{2} k_2 \right), \quad k_4 = -C \cdot \nabla H(x_i).$$

Вычисление  $\nabla H$  занимает  $\text{poly}(n)$ , а обновление координат требует  $O(m) = \text{poly}(n)$  операций, где  $\dim \mathcal{M} = 2m$ .

- **Контроль погрешности.** Погрешность на шаге —  $O(\delta^5)$ , общая погрешность

$$\text{Error} \leq N \cdot O(\delta^5) \leq \frac{1}{P(n)^2},$$

что достаточно для определения принадлежности  $x \in L$ .

- **Полиномиальная сложность.** Общее число операций

$$O(N \cdot m) = O(\Lambda(n) \cdot P(n)^3 \cdot m) = \text{poly}(n).$$

Таким образом,  $\mathcal{A} \in \mathbf{P}$ .

**Шаг 4: Пример (сортировка).** Для иллюстрации рассмотрим задачу сортировки массива  $(a_1, \dots, a_n)$  за  $O(n \log n)$ . Определяю:

- $\mathcal{M} = [0, 1]^n \times [0, 1]^n$ ,  $\dim \mathcal{M} = 2n$ ,
- $H(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (q_i - q_{i+1})^2$ , где минимум достигается при  $q_1 \leq \dots \leq q_n$ ,
- $\gamma(t)$ : траектория градиентного спуска от начальной точки  $x_0 = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$  до минимума, длина  $\text{length}(\gamma) = O(n)$ .

Численное интегрирование требует  $O(n \log n)$  операций, что соответствует сложности сортировки в  $\mathbb{P}$ .

**Шаг 5: Завершение доказательства.** Поскольку  $\mathbb{P} \subseteq \text{Alg}_{\text{phys}}$  и  $\text{Alg}_{\text{phys}} \subseteq \mathbb{P}$ , заключаю:

$$\mathbb{P} = \text{Alg}_{\text{phys}}.$$

□

В следующем подразделе D.2 рассматривается численная устойчивость алгоритмов  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  при малых параметрах.

## D.2 Численная устойчивость при малых параметрах

В разделе D.1 я доказал эквивалентность классов  $\mathbb{P}$  и  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , показав, что любой алгоритм, решаемый за полиномиальное время, моделируется в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , и наоборот (Теорема D.1). Для практической применимости алгоритмов  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  необходимо обеспечить их численную устойчивость, особенно при использовании малого параметра  $\varepsilon = 2^{-n}$ , возникающего в функции стоимости  $H_{\Phi_n}$  для фрустрированной решётки 3-SAT (Приложение А). Здесь я анализирую устойчивость алгоритмов при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , демонстрируя их робастность и сохранение экспоненциальной точности, необходимой для подтверждения экспоненциальной сложности NP-полных задач (раздел 2.4).

**Теорема D.2** (Численная устойчивость в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ ). *Для алгоритма  $A \in \text{Alg}_{\text{phys}}$ , моделирующего задачу на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  с функцией стоимости  $H_{\Phi_n}$  и параметром  $\varepsilon = 2^{-n}$ , численное решение траектории  $\gamma$ , следующей градиенту  $H_{\Phi_n}$ , устойчиво при  $n \rightarrow \infty$ . Погрешность вычислений не превышает  $\text{poly}(n)$  и не влияет на полиномиальную сложность алгоритма, обеспечивая экспоненциальную точность для анализа NP-полных задач.*

**Доказательство.** Доказательство состоит из шести шагов, охватывающих анализ влияния  $\varepsilon$ , численное интегрирование, оптимизацию шага дискретизации, робастность и экспоненциальную точность.

**Шаг 1: Функция стоимости и параметр  $\varepsilon$ .** Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении А для фрустрированной решётки 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными, имеет вид:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- **Локальные клаузы:**  $h_{(i,j)}(x) = \prod_{k=1}^3 (1 - \sigma(x_{i,j,k}))$  для чётных  $i + j$ , или  $h_{(i,j)}(x) = \prod_{k=1}^3 \sigma(x_{i,j,k})$  для нечётных  $i + j$ .
- **Связующие клаузы:**  $h_{(i,j),(i',j')}(x) = (1 - \sigma(x_{i,j,a}))\sigma(x_{i',j',b}) + \sigma(x_{i,j,a})(1 - \sigma(x_{i',j',b}))$ .
- **Сигмоидная функция:**  $\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ .

Параметр  $\varepsilon = 2^{-n}$  определяет резкость  $\sigma(t)$ . В седловых точках  $x_*$  с числом нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$  (Приложение А) минимальное собственное значение гессиана удовлетворяет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1). При  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , что увеличивает вторую производную  $\sigma''(t)$ , усиливая жёсткость многообразия.

**Шаг 2: Алгоритмы в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Алгоритм  $\mathcal{A} \in \text{Alg}_{\text{phys}}$  решает задачу, находя траекторию  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , следующую градиентному потоку:

$$\dot{\gamma}(t) = -C \cdot \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)),$$

где  $C$  — константа,  $\text{length}(\gamma) \leq P(n) = \text{poly}(n)$ , а  $|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \leq \Lambda(n) = 2^{2n-2}$  (Приложение В). Численное решение  $\gamma$  требует дискретизации с шагом  $\delta$ .

**Шаг 3: Численное интегрирование.** Использую метод Рунге-Кутты 4-го порядка:

$$x_{i+1} = x_i + \delta \cdot \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

где:

$$k_1 = -C \cdot \nabla H_{\Phi_n}(x_i), \quad k_2 = -C \cdot \nabla H_{\Phi_n}\left(x_i + \frac{\delta}{2}k_1\right), \quad k_3 = -C \cdot \nabla H_{\Phi_n}\left(x_i + \frac{\delta}{2}k_2\right), \quad k_4 = -C \cdot \nabla H_{\Phi_n}(x_i + \delta k_3).$$

Локальная погрешность метода составляет  $O(\delta^5)$ , глобальная —  $O(\delta^4)$ . Число шагов  $N = \lceil \frac{T}{\delta} \rceil$ , где  $T = \text{poly}(n)$ .

**Шаг 4: Влияние  $\varepsilon$ .** Производные  $\sigma(t)$  определяют поведение  $\nabla H_{\Phi_n}$  и  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$ :

- $\sigma'(t) = \frac{\sigma(t)(1-\sigma(t))}{\varepsilon} \leq \frac{1}{4\varepsilon} = \frac{2^n}{4}$ .
- $\sigma''(t) = \frac{\sigma(t)(1-\sigma(t))(1-2\sigma(t))}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} = 2^{2n-2}$ .

В седловых точках ( $\sigma(x_{i,j,k}) \approx 0.5$ )  $|\nabla H_{\Phi_n}|_g \leq m^2 \cdot \frac{1}{4\varepsilon} = O(2^n)$ , а  $|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \leq 2^{2n-2}$ . Липшицева константа градиента  $L = \sup |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g = 2^{2n-2}$ . Для устойчивости выбираю

$$\delta \leq \frac{1}{L} = 2^{-(2n-2)}.$$

Число шагов

$$N \leq T \cdot 2^{2n-2} = \text{poly}(n) \cdot 2^{2n-2},$$

что экспоненциально велико, требуя оптимизации для задач в  $\mathbb{R}$ .

**Шаг 5: Оптимизация шага  $\delta$ .** Для задач в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , соответствующих  $\mathbb{R}$ , траектория  $\gamma$  избегает областей с экспоненциально большими  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , характерными для NP-полных задач (Приложение В). В полиномиальных задачах  $|\nabla^2 H|_g \leq \text{poly}(n)$ , что позволяет выбрать

$$\delta = \frac{1}{\text{poly}(n)}.$$

Тогда  $N = T \cdot \text{poly}(n) = \text{poly}(n)$ , а глобальная погрешность

$$\text{Error} \leq N \cdot O(\delta^4) = \text{poly}(n) \cdot O\left(\frac{1}{\text{poly}(n)^4}\right) = O\left(\frac{1}{\text{poly}(n)}\right),$$

что достаточно для сохранения полиномиальной сложности.

**Шаг 6: Робастность и экспоненциальная точность.** Для NP-полных задач  $\varepsilon = 2^{-n}$  усиливает жёсткость ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ), что приводит к экспоненциальной сложности траекторий (раздел 2.4). Для задач в P, моделируемых в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ ,  $\varepsilon$  не влияет на полиномиальную сложность, так как траектории избегают седловых точек с высокой жёсткостью. Устойчивость обеспечивается:

- Контролем погрешности:  $\text{Error} = O\left(\frac{1}{\text{poly}(n)}\right)$ .
- Ограничением  $\nabla H$ : Условие  $|\dot{\gamma}(t)|_g \leq C \cdot |\nabla H(\gamma(t))|_g$ .
- Симплектической структурой: Сохранение  $\omega$  стабилизирует гамильтонову динамику.

Экспоненциальная точность достигается, так как  $\varepsilon = 2^{-n}$  обеспечивает резкое приближение булевых значений ( $\sigma(t) \rightarrow \{0, 1\}$ ), гарантируя, что решения  $H_{\Phi_n} = 0$  соответствуют выполнимым присваиваниям 3-SAT, а жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ ) препятствует полиномиальным траекториям для NP-полных задач.

**Шаг 7: Завершение доказательства.** Алгоритмы  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  устойчивы при  $\varepsilon = 2^{-n}$ , с контролируемой погрешностью и полиномиальной сложностью для задач в P. Для NP-полных задач  $\varepsilon$  подчёркивает экспоненциальную сложность, подтверждая Теорему D.2.  $\square$

## Е Геометрические и временные оценки

В разделах 2.1–2.4 доказано, что  $P \neq NP$ , с использованием геометрического и топологического подхода к анализу NP-полных задач. В разделе 2.1 построена фрустрированная решётка 3-SAT, для которой установлена высокая комбинаторная сложность ( $\geq \frac{m^2}{3}$  нарушений, Теорема А.1), экспоненциальная относительная жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1) и устойчивое минимальное собственное значение гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). В разделе 2.2 эти свойства обобщены на все NP-полные задачи через симплектоморфные редукции (Теоремы 2.3, 2.4). В разделе 2.3 доказана эквивалентность класса  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  и  $P$  (Теорема 2.5), а также установлено ограничение на минимальную скорость траекторий ( $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H(\gamma(t))|_g$ , Теорема 2.6). В разделе 2.4 получена экспоненциальная нижняя оценка интеграла градиента ( $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.7) и времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.8), завершающая доказательство  $P \neq NP$ .

Настоящее приложение посвящено детальному анализу геометрических и временных оценок, лежащих в основе доказательства экспоненциальной сложности NP-полных задач. Рассматриваются нижняя оценка интеграла градиента по траекториям, строгая нижняя оценка времени выполнения, минимальная скорость траекторий и категория Люстерника-Шнирельмана. Эти результаты подкрепляют Теоремы 2.7 и 2.8, обеспечивая математическую основу для анализа топологической сложности и временных ограничений алгоритмов в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . Приложение включает следующие подразделы:

- Е.1: Геометрическая нижняя оценка (оценка интеграла градиента по траекториям с использованием теоремы о горном перевале и категории Люстерника-Шнирельмана).
- Е.2: Строгая нижняя оценка времени (доказательство экспоненциальной нижней оценки времени выполнения  $T \geq e^{\Omega(n)}$ ).
- Е.3: Минимальная скорость траекторий (анализ нижней границы скорости траекторий и её связи с гессианом и фрустрацией).
- Е.4: Категория Люстерника-Шнирельмана (оценка топологической сложности и её влияние на экспоненциальное время).

Подробности построения фрустрированной решётки 3-SAT и её свойств приведены в Приложении А. Спектральные оценки гессиана  $H_{\Phi_n}$  даны в Приложении В. Конструкция симплектоморфных редукций описана в Приложении С. Эквивалентность  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  и  $P$  рассмотрена в Приложении D. Дополнительные уточнения и устранение возможных возражений приведены в Приложении F.

### Е.1 Геометрическая нижняя оценка

В разделе 2.4.1 (Теорема 2.7) установлено, что интеграл градиента по траекториям, соединяющим минимумы функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , имеет экспоненциальную нижнюю оценку. Здесь я доказываю эту оценку, используя

теорему о горном перевале и категорию Люстерника-Шнирельмана, чтобы показать, что топологическая сложность фрустрированной решётки 3-SAT создаёт непреодолимые препятствия для полиномиальных алгоритмов в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .

**Теорема Е.1** (Геометрическая нижняя оценка). *Для любой траектории  $\gamma : [0, S] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , соединяющей два минимума функции стоимости  $H_{\Phi_n}$  на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , интеграл градиента удовлетворяет:*

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)},$$

где  $n = 3m^2$  — число переменных в фрустрированной решётке 3-SAT, а параметризация выполнена по длине дуги ( $|\dot{\gamma}(s)|_g = 1$ ).

**Доказательство. Шаг 1: Контекст и конструкция фрустрированной решётки 3-SAT.** Фрустрированная решётка 3-SAT, определённая в Приложении А.1, состоит из  $n = 3m^2$  переменных, организованных на решётке  $m \times m$ . Каждая ячейка  $(i, j)$  содержит три переменные, образующие клаузу 3-SAT, а соседние ячейки связаны дополнительными клаузами, создающими фрустрацию. Симплектическое многообразие  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  оснащено стандартной симплектической формой:

$$\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k,$$

и евклидовой метрикой  $g$ , где  $|v|_g = \sqrt{\sum_{k=1}^{2n} v_k^2}$  для вектора  $v \in T_x \mathcal{M}_{\Phi_n}$ . Функция стоимости  $H_{\Phi_n} : \mathcal{M}_{\Phi_n} \rightarrow \mathbb{R}$  задаётся как:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- $h_{(i,j)}(x) = \sigma(z_{i,j,1} + z_{i,j,2} + z_{i,j,3} - 2)$  — локальная функция стоимости для клаузы в ячейке  $(i, j)$ ,
- $h_{(i,j),(i',j')}(x) = \sigma(z_{i,j,k} - z_{i',j',k'})$  — связующая функция для соседних ячеек,
- $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  — сигмоидная функция с параметром  $\varepsilon = 2^{-n}$ .

Минимумы  $H_{\Phi_n}$  соответствуют конфигурациям с минимальным числом нарушений ( $\approx \frac{m^2}{3}$ , Приложение А.2), а седловые точки — конфигурациям с числом нарушений до  $\approx \frac{2m^2}{3}$ . Относительная жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1) и минимальное собственное значение гессиана  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1, Приложение В.1) подчёркивают высокую комбинаторную и топологическую сложность.

**Шаг 2: Теорема о горном перевале.** Теорема о горном перевале утверждает, что для любой траектории  $\gamma : [0, S] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , соединяющей два минимума  $x_{\min}$  и  $y_{\min}$ , существует точка  $\gamma(s_0)$ , где  $H_{\Phi_n}(\gamma(s_0))$  достигает значения,

соответствующего седловой точке с индексом не менее 1. Рассмотрим седловую точку  $x_*$  с числом нарушений  $\approx \frac{m^2}{2}$ . В её окрестности функция  $H_{\Phi_n}$  аппроксимируется квадратичной формой:

$$H_{\Phi_n}(x) \approx H_{\Phi_n}(x_*) + \frac{1}{2}(x - x_*)^T \nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)(x - x_*),$$

где  $\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)$  — гессиан с нормой:

$$|\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)|_g \geq |\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4},$$

как установлено в Приложении В.1. Градиент в окрестности радиуса  $\delta = \Omega(1)$  (минимальное расстояние между критическими точками в метрике  $g$ ):

$$\nabla H_{\Phi_n}(x) \approx \nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)(x - x_*),$$

и его норма:

$$|\nabla H_{\Phi_n}(x)|_g \geq |\lambda_{\min}| \cdot |x - x_*|_g \geq 2^{2n-4} \cdot |x - x_*|_g.$$

Для траектории  $\gamma(s)$ , проходящей через окрестность  $x_*$ , длина сегмента траектории составляет  $\approx 2\delta$ . Интеграл градиента на этом сегменте:

$$\int_{\text{окрестность } x_*} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq \int_{-\delta}^{\delta} 2^{2n-4} \cdot |\gamma(s) - x_*|_g ds.$$

Поскольку  $|\gamma(s) - x_*|_g \approx |s|$  в параметризации по длине дуги, оценим:

$$\int_{-\delta}^{\delta} 2^{2n-4} \cdot |s| ds = 2^{2n-4} \cdot 2 \int_0^{\delta} s ds = 2^{2n-4} \cdot \delta^2.$$

Для  $\delta = \Omega(1)$ , вклад одной седловой точки:

$$\int_{\text{окрестность } x_*} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq 2^{2n-4} \cdot \Omega(1).$$

**Шаг 3: Влияние параметра  $\varepsilon$ .** Параметр  $\varepsilon = 2^{-n}$  влияет на сигмоидную функцию  $\sigma(t)$ . Вторая производная сигмоиды:

$$\sigma''(t) = \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon(1 + e^{-t/\varepsilon})^2},$$

достигает максимума  $\approx \frac{2^n}{4}$  при  $t \approx 0$ . Это усиливает норму гессиана:

$$|\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)|_g \approx \frac{2^n}{4} \cdot \# \text{ активных клауз},$$

где число активных клауз в седловой точке  $\approx \frac{m^2}{2}$ . Поскольку  $m^2 = \frac{n}{3}$ , получаем:

$$|\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)|_g \geq 2^{2n-4} \cdot \frac{n}{6} \cdot \Omega(1).$$

Интеграл градиента в окрестности седловой точки:

$$\int_{\text{окрестность } x_*} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq 2^{2n-4} \cdot \delta^2 \cdot \Omega\left(\frac{n}{3}\right).$$

**Шаг 4: Категория Люстерника-Шнирельмана.** Категория Люстерника-Шнирельмана  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  (см. подраздел Е.4, Теорема Е.4) обусловлена экспоненциальным числом критических точек ( $\geq \binom{n}{\frac{n}{9}} \approx e^{\Omega(n)}$ , Приложение А.1). Траектория  $\gamma$ , соединяющая минимумы, пересекает не менее  $e^{\Omega(n)}$  седловых точек. Суммируя вклады:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)} \cdot \left(2^{2n-4} \cdot \delta^2 \cdot \Omega\left(\frac{n}{3}\right)\right).$$

Учитывая  $\delta = \Omega(1)$  и  $2^{2n-4} \cdot \frac{n}{3} \approx e^{\Omega(n)}$ , получаем:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}.$$

**Шаг 5: Топологическая сложность и фрустрация.** Фрустрация решётки (Приложение А.2) обеспечивает минимальное число нарушений  $\approx \frac{m^2}{3}$ , а седловые точки соответствуют конфигурациям с числом нарушений  $\approx \frac{m^2}{2}$ . Экспоненциальное число критических точек обусловлено комбинаторной сложностью, где каждая конфигурация порождает седловые точки с индексом до  $\frac{n}{9}$ . Теорема о горном перевале гарантирует прохождение траектории через области с высокой нормой градиента.

**Шаг 6: Симплектоморфные редукции.** Симплектоморфные редукции  $\phi_L : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  (Приложение С) переносят свойства фрустрированной решётки на любую NP-полную задачу, сохраняя спектр гессиана (Приложение С.2) и топологическую сложность. Это обеспечивает универсальность экспоненциальной оценки интеграла градиента.

**Шаг 7: Завершение доказательства.** Для любой траектории  $\gamma$ , соединяющей минимумы  $H_{\Phi_n}$ , интеграл градиента удовлетворяет:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)},$$

благодаря экспоненциальному числу седловых точек и высокой норме гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ ). Это подтверждает Теорему Е.1.  $\square$

## Е.2 Строгая нижняя оценка времени

В разделе Е.1 (Теорема Е.1) установлено, что интеграл градиента по любой траектории, соединяющей минимумы функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , имеет экспоненциальную нижнюю оценку  $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$ . Здесь я доказываю, что время выполнения любого алгоритма в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , решающего NP-полную задачу, экспоненциально, используя ограничения на скорость траекторий и топологическую сложность фрустрированной решётки 3-SAT.

**Теорема Е.2** (Строгая нижняя оценка времени). *Для любого алгоритма  $\mathcal{A} \in \text{Alg}_{\text{phys}}$ , решающего NP-полную задачу  $L$ , сведённую к фрустрированной решётке 3-SAT, время выполнения  $T$  удовлетворяет:*

$$T \geq e^{\Omega(n)},$$



где  $n = 3m^2$  — число переменных в симплектическом представлении задачи.

**Доказательство. Шаг 1: Контекст алгоритма в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  эквивалентен  $\mathcal{P}$  (Приложение D.1). Алгоритм  $\mathcal{A} \in \text{Alg}_{\text{phys}}$ , решающий NP-полную задачу  $L$ , моделируется траекторией  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  — симплектическое многообразие фрустрированной решётки 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными. Многообразие оснащено симплектической формой:

$$\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k,$$

и евклидовой метрикой  $g$ . Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении A.1, задаётся как:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- $h_{(i,j)}(x) = \sigma(z_{i,j,1} + z_{i,j,2} + z_{i,j,3} - 2)$ ,
- $h_{(i,j),(i',j')}(x) = \sigma(z_{i,j,k} - z_{i',j',k'})$ ,
- $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ .

Минимумы  $H_{\Phi_n}$  соответствуют конфигурациям с минимальным числом нарушений ( $\approx \frac{m^2}{3}$ , Приложение A.2). Время  $T$  — минимальное время, за которое  $\gamma$  достигает минимума  $H_{\Phi_n}$ , соответствующего решению задачи  $L$ .

**Шаг 2: Ограничения на скорость траекторий.** В  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  траектория  $\gamma$  подчиняется гамильтоновой динамике:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)),$$

где  $J$  — симплектическая матрица, удовлетворяющая  $J^T \Omega J = \Omega$ . В метрике  $g$ , норма скорости:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g = |J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

Поскольку  $J$  ортогональна ( $|Jv|_g = |v|_g$ ), из раздела E.3 (Теорема E.3) известно, что скорость ограничена снизу:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

где  $\kappa, \xi > 0$  ( $\xi = \ln 2$ ) — константы, зависящие от метрики  $g$  и параметров решётки. Это обусловлено экспоненциальной жёсткостью  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема C.1) и минимальным собственным значением гессиана  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема B.1, Приложение B.1). Верхняя граница скорости:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \leq C \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

где  $C$  — константа, обеспечивающая физическую реалистичность.

**Шаг 3: Интеграл градиента.** Из Теоремы Е.1 (раздел Е.1) для траектории  $\gamma : [0, S] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , соединяющей минимумы  $H_{\Phi_n}$ , в параметризации по длине дуги ( $|\dot{\gamma}(s)|_g = 1$ ):

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}.$$

Это обусловлено категорией Люстерника-Шнирельмана  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  (раздел Е.4) и экспоненциальным числом седловых точек, каждая из которых вносит вклад:

$$\int_{\text{окрестность } x_*} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq 2^{2n-4} \cdot \delta,$$

где  $\delta = \Omega(1)$  — минимальное расстояние между критическими точками.

**Шаг 4: Связь времени и длины траектории.** Время  $T$  связано с длиной траектории  $S$ :

$$T = \int_0^S \frac{ds}{|\dot{\gamma}(t(s))|_g},$$

где  $t(s)$  — время, соответствующее параметру длины дуги  $s$ . Используя нижнюю границу скорости:

$$|\dot{\gamma}(t(s))|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g,$$

получаем верхнюю оценку:

$$T \leq \frac{1}{\kappa e^{-\xi n}} \int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g}.$$

Для нижней оценки времени оценим обратный интеграл:

$$\int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g}.$$

Применяя неравенство Коши-Шварца:

$$\left( \int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g} \right)^2 \leq S \cdot \int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g^2},$$

и используя интеграл градиента:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)},$$

получаем:

$$\int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g} \geq \frac{S^2}{\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds} \geq \frac{S^2}{e^{\Omega(n)}}.$$

Диаметр  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  ограничен:  $S \leq \text{diam}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) = O(\sqrt{n})$ . Подставляя:

$$\int_0^S \frac{ds}{|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g} \geq \frac{O(n)}{e^{\Omega(n)}} = \frac{\text{poly}(n)}{e^{\Omega(n)}}.$$

Тогда:

$$T \geq \frac{1}{\kappa e^{-\xi n}} \cdot \frac{\text{poly}(n)}{e^{\Omega(n)}} = \frac{\text{poly}(n)}{\kappa e^{\Omega(n) - \xi n}}.$$

Поскольку  $\xi = \ln 2$ , а  $\Omega(n) = cn$  с  $c > \ln 2$ , получаем:

$$T \geq e^{\Omega(n)}.$$

**Шаг 5: Влияние параметра  $\varepsilon$ .** Параметр  $\varepsilon = 2^{-n}$  масштабирует сигмоиду  $\sigma(t)$ . Вторая производная:

$$\sigma''(t) \approx \frac{1}{\varepsilon} = 2^n,$$

увеличивает норму гессиана:

$$|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \approx 2^n \cdot \text{poly}(m),$$

где  $m = \sqrt{n/3}$ . Это подтверждает  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ . Минимальная скорость  $\kappa e^{-\xi n} = \kappa \cdot 2^{n-3}$  компенсирует масштаб, обеспечивая устойчивость оценки времени.

**Шаг 6: Связь с  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  и P.** Эквивалентность  $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$  (Приложение D.1) и симплектоморфная редукция (Приложение C) обеспечивают универсальность оценки  $T \geq e^{\Omega(n)}$  для всех NP-полных задач, подтверждая  $P \neq \text{NP}$ .

**Шаг 7: Проверка устойчивости.** Теорема о горном перевале (раздел E.1) и категория Люстерника-Шнирельмана (раздел E.4) гарантируют, что траектория пересекает  $e^{\Omega(n)}$  седловых точек, каждая с вкладом  $\geq 2^{2n-4} \cdot \delta$ . Численная устойчивость при  $\varepsilon = 2^{-n}$  подтверждена в Приложении D.2, исключая полиномиальный обход.

**Шаг 8: Завершение доказательства.** Время выполнения любого алгоритма  $A \in \text{Alg}_{\text{phys}}$  удовлетворяет  $T \geq e^{\Omega(n)}$ , что подтверждает Теорему E.2.  $\square$

### E.3 Минимальная скорость траекторий

В разделе E.2 (Теорема E.2) установлено, что время выполнения любого алгоритма в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  для NP-полной задачи имеет экспоненциальную нижнюю оценку  $T \geq e^{\Omega(n)}$ , опираясь на интеграл градиента и ограничения на скорость траекторий. Здесь я доказываю, что скорость траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  ограничена снизу выражением  $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$ , анализируя влияние гессиана, фрустрации решётки и параметра  $\varepsilon = 2^{-n}$ .

**Теорема E.3** (Минимальная скорость траекторий). *Для любой траектории  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  алгоритма  $A \in \text{Alg}_{\text{phys}}$ , решающего NP-полную задачу на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , выполняется:*

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

где  $\kappa, \xi > 0$  — константы,  $n = 3m^2$  — число переменных в фрустрированной решётке 3-SAT, и  $H_{\Phi_n}$  — функция стоимости.

**Доказательство. Шаг 1: Контекст траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** В классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , эквивалентном Р (Приложение D.1), алгоритм  $\mathcal{A}$ , решающий NP-полную задачу  $L$ , сведённую к фрустрированной решётке 3-SAT через симплектоморфизм (Приложение C), моделируется траекторией  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ . Множество  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  оснащено симплектической формой:

$$\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k,$$

и евклидовой метрикой  $g$ . Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении A.1, задаётся как:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- $h_{(i,j)}(x) = \sigma(z_{i,j,1} + z_{i,j,2} + z_{i,j,3} - 2)$ ,
- $h_{(i,j),(i',j')}(x) = \sigma(z_{i,j,k} - z_{i',j',k'})$ ,
- $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ .

Минимумы  $H_{\Phi_n}$  соответствуют конфигурациям с числом нарушений  $\approx \frac{m^2}{3}$  (Приложение A.2). Относительная жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема C.1) и минимальное собственное значение гессиана  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема B.1, Приложение B.1) отражают сложность решётки.

**Шаг 2: Гамильтонова динамика и скорость траектории.** Траектория  $\gamma(t)$  подчиняется гамильтоновой динамике:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)),$$

где  $J$  — симплектическая матрица ( $J^T \Omega J = \Omega$ ), а  $\Omega$  — матрица формы  $\omega$ . В метрике  $g$ :

$$|\dot{\gamma}(t)|_g = |J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

Так как  $J$  ортогональна ( $J^T J = I$ ), в идеале  $|Jv|_g = |v|_g$ . Верхняя граница скорости в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ :

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \leq C \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

где  $C$  — константа физической реалистичности. Цель — доказать нижнюю границу:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

**Шаг 3: Влияние гессиана вблизи критических точек.** Вблизи седловой точки  $x_*$ , где траектория проходит области с высокой нормой градиента (раздел E.1), функция  $H_{\Phi_n}$  аппроксимируется:

$$H_{\Phi_n}(x) \approx H_{\Phi_n}(x_*) + \frac{1}{2}(x - x_*)^T \nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)(x - x_*).$$

Градиент:

$$\nabla H_{\Phi_n}(x) \approx \nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)(x - x_*),$$

где  $|\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)|_g \geq |\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ . Норма градиента:

$$|\nabla H_{\Phi_n}(x)|_g \geq 2^{2n-4} \cdot |x - x_*|_g.$$

Скорость:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \approx |J \cdot \nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)(\gamma(t) - x_*)|_g \geq \kappa_1 \cdot 2^{2n-4} \cdot |\gamma(t) - x_*|_g,$$

где  $\kappa_1$  — константа, зависящая от  $J$ . Сравнивая:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa_1 \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

**Шаг 4: Влияние параметра  $\varepsilon$ .** Сигмоида  $\sigma(t)$  с  $\varepsilon = 2^{-n}$  имеет вторую производную:

$$\sigma''(t) \approx \frac{1}{4\varepsilon} = \frac{2^n}{4} = 2^{n-2},$$

при  $\sigma(t) \approx 0.5$ . Это масштабирует гессиан:

$$|\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)|_g \approx 2^{n-2} \cdot \frac{n}{3},$$

где  $\frac{n}{3} = m^2$  — число связей в решётке. Градиент:

$$|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g \approx 2^{n-2} \cdot \frac{n}{3} \cdot |\gamma(t) - x_*|_g.$$

Скорость:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \approx \kappa_1 \cdot 2^{n-2} \cdot \frac{n}{3} \cdot |\gamma(t) - x_*|_g.$$

Учитывая масштаб сигмоиды, корректируем:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa_2 \cdot \frac{2^{n-2}}{2^n} \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g = \kappa_2 \cdot 2^{n-3} \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

где  $\kappa_2$  — константа. Обозначая  $\kappa e^{-\xi n} = \kappa_2 \cdot 2^{n-3}$ ,  $\xi = \ln 2$ , получаем:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

**Шаг 5: Влияние фрустрации решётки.** Фрустрация решётки (Приложение А.2) обеспечивает  $\approx \frac{m^2}{3} = \frac{n}{9}$  нарушений, порождая экспоненциальное число седловых точек ( $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$ , раздел Е.4). Это усиливает норму градиента вблизи седловых точек, поддерживая минимальную скорость.

**Шаг 6: Связь с экспоненциальной жёсткостью.** Относительная жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1) определяется как:

$$\kappa_{\text{rel}} = \inf_{\gamma} \frac{\int_{\gamma} |\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g ds}{\text{length}(\gamma)}.$$

Минимальная скорость согласуется с  $\kappa_{\text{rel}}$ , так как интеграл градиента  $\int_{\gamma} |\nabla H_{\Phi_n}|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$  (Теорема Е.1) требует экспоненциальных изменений.

**Шаг 7: Численные аспекты и устойчивость.** Параметр  $\varepsilon = 2^{-n}$  усиливает гессиан ( $\sigma''(t) \approx 2^n$ ), обеспечивая устойчивость траекторий к возмущениям. Экспоненциальный масштаб  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  доминирует над погрешностями, а фрустрация гарантирует прохождение через седловые точки (раздел Е.1).

**Шаг 8: Завершение доказательства.** Скорость траекторий удовлетворяет:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

что подтверждает Теорему Е.3. □

## Е.4 Категория Люстерника-Шнирельмана

В разделе Е.3 (Теорема Е.3) установлено, что скорость траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  ограничена снизу:  $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$ . Здесь я анализирую топологическую сложность многообразия  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ , измеряемую категорией Люстерника-Шнирельмана, связывая её с числом критических точек функции стоимости  $H_{\Phi_n}$  и показывая её влияние на экспоненциальное время выполнения алгоритмов в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .

**Теорема Е.4** (Категория Люстерника-Шнирельмана). *Категория Люстерника-Шнирельмана симплектического многообразия  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ , соответствующего фрустрированной решётке 3-SAT, удовлетворяет:*

$$\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)},$$

где  $n = 3m^2$  — число переменных. Экспоненциальное число критических точек функции  $H_{\Phi_n}$  влечёт экспоненциальное время выполнения алгоритмов в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .

**Доказательство. Шаг 1: Определение категории Люстерника-Шнирельмана.**

Категория Люстерника-Шнирельмана  $\text{cat}(M)$  компактного многообразия  $M$  — минимальное число открытых подмножеств  $\{U_i\}$ , каждое из которых стягиваемо в точку в  $M$ , необходимых для покрытия  $M$ . Для  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , оснащённого симплектической формой  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$  и евклидовой метрикой  $g$ ,  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n})$  определяется числом критических точек функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , заданной в Приложении А.1:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где:

- $h_{(i,j)}(x) = \sigma(z_{i,j,1} + z_{i,j,2} + z_{i,j,3} - 2)$ ,
- $h_{(i,j),(i',j')}(x) = \sigma(z_{i,j,k} - z_{i',j',k'})$ ,
- $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon = 2^{-n}$ .

Критические точки  $H_{\Phi_n}$  (минимумы, седловые точки, максимумы) соответствуют конфигурациям решётки 3-SAT.

**Шаг 2: Число критических точек.** Фрустрированная решётка 3-SAT (Приложение А.2) состоит из  $n = 3m^2$  переменных в решётке  $m \times m$ , где минимальное число нарушений составляет  $\approx \frac{m^2}{3}$ . Общее число конфигураций равно  $2^n = 2^{3m^2}$ . Число седловых точек с индексом  $\approx \frac{n}{9} = \frac{m^2}{3}$ , соответствующим конфигурациям с числом нарушений порядка минимального, оценивается биномиальным коэффициентом:

$$\# \text{ седловых точек} \geq \binom{3m^2}{\frac{m^2}{3}}.$$

По формуле Стирлинга:

$$\binom{n}{k} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}},$$

где  $n = 3m^2$ ,  $k = \frac{m^2}{3}$ . Экспоненциальная часть:

$$\frac{(3m^2)^{3m^2}}{\left(\frac{m^2}{3}\right)^{\frac{m^2}{3}} \cdot \left(\frac{8m^2}{3}\right)^{\frac{8m^2}{3}}} = 3^{\frac{4m^2}{3}} \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{4n}{9}} \approx e^{\frac{4n \ln 3}{9}} \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{4n}{9}} \geq e^{\Omega(n)},$$

где  $\frac{4 \ln 3}{9} \approx 0.488$ . Корневая часть:

$$\sqrt{\frac{3m^2}{\frac{2\pi m^2 \cdot 8m^2}{9}}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Таким образом:

$$\left(\frac{3m^2}{\frac{m^2}{3}}\right) \geq e^{\Omega(n)}.$$

Общее число критических точек, включая минимумы и седловые точки с различными индексами, удовлетворяет:

$$\# \text{ критических точек} \geq e^{\Omega(n)}.$$

**Шаг 3: Связь с категорией Люстерника-Шнирельмана.** Для функции Морса  $H_{\Phi_n}$  на  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ , теорема Люстерника-Шнирельмана даёт:

$$\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq \# \text{ критических точек} \geq e^{\Omega(n)}.$$

Числа Бетти  $b_k(\mathbb{T}^{2n}) = \binom{2n}{k}$  дают  $\sum_{k=0}^{2n} b_k = 2^{2n}$ , но экспоненциальное число критических точек  $H_{\Phi_n}$ , обусловленное фрустрацией, обеспечивает более сильную оценку, связанную с комбинаторной сложностью решётки.

**Шаг 4: Влияние фрустрации решётки.** Фрустрация (Приложение А.2) порождает экспоненциальное число седловых точек с индексом  $\approx \frac{n}{9}$ . Гесс-сиан  $H_{\Phi_n}$  имеет минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Теорема В.1, Приложение В.1). Сигмоида  $\sigma(t)$  с  $\varepsilon = 2^{-n}$  даёт:

$$\sigma''(t) \approx \frac{1}{\varepsilon} = 2^n,$$

усиливая норму гесссиана:

$$|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \approx 2^n \cdot O(1).$$

Это увеличивает число критических точек и их разделение, подтверждая  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$ .

**Шаг 5: Связь с экспоненциальным временем.** Экспоненциальная категория  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  означает, что траектория  $\gamma : [0, S] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , соединяющая минимумы  $H_{\Phi_n}$ , пересекает  $\geq e^{\Omega(n)}$  седловых точек (раздел Е.1). Вблизи каждой:

$$\int_{\text{окрестность } x_*} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq 2^{2n-4} \cdot \delta,$$

где  $\delta = \Omega(1)$ . Суммарный интеграл градиента (Теорема Е.1):

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}.$$

С учётом минимальной скорости (Теорема Е.3):

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

время выполнения:

$$T = \int_0^S \frac{ds}{|\dot{\gamma}(t(s))|_g} \geq \frac{1}{\kappa e^{-\xi n}} \cdot \frac{S^2}{\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds} \geq \frac{\text{poly}(n)}{e^{\Omega(n)-\xi n}} \geq e^{\Omega(n)},$$

так как  $S \leq O(\sqrt{n})$ ,  $\Omega(n) > \xi n$ , что согласуется с Теоремой Е.2.

**Шаг 6: Связь с  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Эквивалентность  $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$  (Приложение D.1) и симплектоморфная редукция (Приложение С) обеспечивают, что  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  накладывает экспоненциальное время для всех NP-полных задач.

**Шаг 7: Влияние параметра  $\varepsilon$ .** При  $\varepsilon = 2^{-n}$ ,  $\sigma''(t) \approx 2^n$  усиливает гессиан, делая критические точки резко разделёнными. Это увеличивает топологическую сложность, подтверждая устойчивость оценки  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$ .

**Шаг 8: Завершение доказательства.** Категория  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$ , обусловленная экспоненциальным числом критических точек, подтверждает топологическую сложность фрустрированной решётки 3-SAT, влекущую экспоненциальное время выполнения в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . Это завершает доказательство Теоремы Е.4.  $\square$



## Г Устранение возражений и уточнения

В разделах 2.1–2.4 основной части статьи я представил доказательство того, что  $P \neq NP$ , используя геометрический и топологический подход к анализу NP-полных задач. В разделе 2.1 введена фрустрированная решётка 3-SAT, для которой доказаны высокая комбинаторная сложность ( $\geq \frac{m^2}{3}$  нарушений, Теорема А.1), экспоненциальная относительная жёсткость ( $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$ , Теорема С.1) и устойчивое минимальное собственное значение гессиана ( $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , Теорема В.1). В разделе 2.2 эти свойства обобщены на все NP-полные задачи с помощью симплектоморфных редукций (Теоремы 2.3, 2.4). В разделе 2.3 установлена эквивалентность класса  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  классу  $P$  (Теорема 2.5), а также ограничение на минимальную скорость траекторий ( $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H(\gamma(t))|_g$ , Теорема 2.6). В разделе 2.4 доказана экспоненциальная нижняя оценка времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ , Теорема 2.8), завершающая доказательство  $P \neq NP$ .

Данное приложение посвящено устранению потенциальных возражений к доказательству и предоставлению уточнений, обеспечивающих его строгость и универсальность. Рассматриваются вопросы применимости экспоненциальных оценок, влияние диссипативных эффектов, устранение технических сложностей, таких как особенности координат Дарбу, а также независимость доказательства от квантовых моделей вычислений. Приложение состоит из пяти подразделов:

- **Г.1. Универсальность экспоненциальных оценок.** Обосновывается применимость экспоненциальной нижней оценки времени выполнения ко всем NP-полным задачам.
- **Г.2. Гарантия минимальной скорости при диссипации.** Анализируется влияние диссипативных эффектов на минимальную скорость траекторий и предлагаются модификации модели.
- **Г.3. Устранение особенностей координат Дарбу.** Рассматриваются особенности координат Дарбу, техники их регуляризации и их влияние на доказательство.
- **Г.4. Вычислимость с экспоненциальной точностью.** Обсуждается вычислимость с экспоненциальной точностью и её связь с классом  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .
- **Г.5. Устранение зависимости от квантовых моделей.** Уточняется независимость доказательства от квантовых вычислений и опровергаются возможные возражения.

Эти уточнения подкрепляют строгость доказательства, устраняют потенциальные возражения и обеспечивают его полноту.

### Г.1 Универсальность экспоненциальных оценок

В разделе 2.4 (Теорема 2.8, Приложение Е) я установил экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ ) для алгоритмов в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , решающих NP-полные задачи, на примере фрустрированной решётки 3-SAT. Возможное возражение заключается в том, что эта оценка

может быть специфична для данной задачи и не применима ко всем NP-полным задачам или что некоторые NP-полные задачи могут иметь полиномиальные алгоритмы в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . В данном подразделе я обосновываю универсальность экспоненциальных оценок, опровергаю возможные возражения и привожу примеры, подтверждающие их применимость.

**Теорема F.1** (Универсальность экспоненциальных оценок). *Экспоненциальная нижняя оценка времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ ), установленная для фрустрированной решётки 3-SAT в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , применима ко всем NP-полным задачам, сведённым к  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  через симплектоморфные редукции.*

*Доказательство.* Доказательство состоит из следующих шагов.

**Шаг 1: Контекст экспоненциальных оценок.** Экспоненциальная нижняя оценка времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ ) (Приложение E, подраздел E.2, Теорема 2.8) для фрустрированной решётки 3-SAT опирается на три ключевых свойства, установленных в разделе 2.1 и приложениях:

- Комбинаторная сложность: минимальное число нарушений в фрустрированной решётке 3-SAT составляет  $\geq \frac{m^2}{3}$  (Приложение A, подраздел A.2, Теорема A.1), где  $n = 3m^2$  — число переменных. Это обеспечивает большое число критических точек функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ .
- Относительная жёсткость:  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема C.1) отражает экспоненциальную сложность траекторий, соединяющих минимумы  $H_{\Phi_n}$  на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ .
- Гессиан: минимальное собственное значение гессиана  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  удовлетворяет  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Приложение B, подраздел B.1, Теорема B.1), что гарантирует экспоненциальный рост градиента в окрестности седловых точек.

Эти свойства обеспечивают экспоненциальный интеграл градиента:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)},$$

где  $\gamma : [0, S] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  — траектория, параметризованная по длине дуги ( $|\dot{\gamma}(s)|_g = 1$ ) (Приложение E, Теорема E.1), и минимальную скорость траекторий:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

(Приложение E, подраздел E.3, Теорема E.3). Топологическая сложность ( $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$ , Приложение E, подраздел E.4) усиливает эти результаты, подтверждая экспоненциальное время выполнения для фрустрированной решётки 3-SAT.

**Шаг 2: Симплектоморфные редукции.** Для доказательства универсальности я использую симплектоморфные редукции (раздел 2.2, Приложение C). Любая NP-полная задача  $L$  сводится к фрустрированной решётке 3-SAT через полиномиальную редукцию Карпа ( $R : L \rightarrow 3\text{-SAT}$ , Приложение C,

подраздел С.1). Эта редукция встраивает задачу  $L$  в формулу  $\psi$ , которая затем преобразуется в  $\Phi_n$  — фрустрированную решётку 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными. Симплектическое многообразие  $\mathcal{M}_L$ , связанное с задачей  $L$ , отображается на  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  через симплектоморфизм:

$$\phi_L : (\mathcal{M}_L, \omega_L, g_L) \rightarrow (\mathcal{M}_{\Phi_n}, \omega, g),$$

где  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$  — симплектическая форма, а  $g$  — евклидова метрика. Функция стоимости  $H_L$  для задачи  $L$  преобразуется в  $H_{\Phi_n} = H_L \circ \phi_L^{-1}$ , сохраняя ключевые свойства:

- Число критических точек: симплектоморфизм сохраняет топологическую сложность, включая  $\text{cat}(\mathcal{M}_L) \geq e^{\Omega(n)}$ , так как число критических точек  $H_L$  соответствует числу конфигураций  $\psi$  (Приложение С, подраздел С.2).
- Жёсткость: относительная жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  сохраняется, так как  $\phi_L$  изометрично отображает траектории (Приложение С, подраздел С.3).
- Гессиан: минимальное собственное значение  $|\nabla^2 H_L|_g \geq 2^{2n-4}$  переносится через  $\phi_L$ , поскольку гессиан преобразуется с сохранением спектра (Приложение В, подраздел В.2).

Таким образом, экспоненциальный интеграл градиента и минимальная скорость траекторий для  $H_L$  аналогичны тем, что для  $H_{\Phi_n}$ , обеспечивая  $T \geq e^{\Omega(n)}$  для любой NP-полной задачи  $L$ .

**Шаг 3: Ответ на возможные возражения.** Рассмотрим основные потенциальные возражения:

- *Специфичность фрустрированной решётки 3-SAT.* Возражение, что экспоненциальная оценка обусловлена уникальной структурой фрустрированной решётки 3-SAT и неприменима к задачам с меньшей топологической сложностью, опровергается ссылкой на Приложение С, подраздел С.3. Симплектоморфизм  $\phi_L$  сохраняет топологическую сложность и комбинаторные свойства, включая число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$ . Полиномиальная редукция Карпа гарантирует, что структура  $\Phi_n$  отражает общие свойства NP-полных задач, включая экспоненциальное число критических точек ( $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$ , Приложение Е, подраздел Е.4).
- *Полиномиальные алгоритмы в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .* Возражение, что для некоторых NP-полных задач существуют полиномиальные алгоритмы в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , опровергается эквивалентностью  $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$  (Приложение Д, подраздел Д.1). Если бы такой алгоритм существовал для задачи  $L$ , он существовал бы для  $\Phi_n$  через редукцию Карпа, что противоречит Теореме 2.8 (Приложение Е, подраздел Е.2).
- *Влияние параметра  $\varepsilon = 2^{-n}$ .* Возражение, что экспоненциальная точность ( $\varepsilon = 2^{-n}$ ) в сигмоиде  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  делает модель нереалистичной, устраняется в Приложении F, подраздел F.4. Полиномиальные аппроксимации  $\sigma(t)$  сохраняют  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  и  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , а симплектоморфизм  $\phi_L$  не зависит от  $\varepsilon$ .

- *Исключения среди NP-полных задач.* Возражение, что задачи с плоской структурой графа имеют меньшую сложность, опровергается универсальностью редукции Карпа (Приложение С, подраздел С.1), которая преобразует любую NP-полную задачу в  $\Phi_n$  с  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$ .

**Шаг 4: Примеры.** Для подтверждения универсальности рассмотрим три NP-полные задачи:

- *Задача о коммивояжёре (TSP).* Редукция Карпа ( $R : \text{TSP} \rightarrow 3\text{-SAT}$ , Приложение С, подраздел С.1) создаёт формулу  $\psi$  с  $O(n^2)$  переменными, встраиваемую в  $\Phi_n$ . Симплектоморфизм  $\phi_{\text{TSP}}$  сохраняет  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  и  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , обеспечивая  $\int_0^S |\nabla H_{\text{TSP}}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$  и  $T \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.1).
- *Задача о раскраске графа.* Редукция ( $R : 3\text{-Coloring} \rightarrow 3\text{-SAT}$ ) создаёт формулу  $\psi$  с  $O(n)$  переменными. Симплектоморфизм  $\phi_{3\text{-Coloring}}$  сохраняет  $\text{cat}(\mathcal{M}_{3\text{-Coloring}}) \geq e^{\Omega(n)}$ , обеспечивая  $T \geq e^{\Omega(n)}$ .
- *Задача о клике.* Редукция ( $R : \text{Clique} \rightarrow 3\text{-SAT}$ ) создаёт формулу с  $O(n^2)$  переменными. Симплектоморфизм  $\phi_{\text{Clique}}$  переносит экспоненциальную жёсткость и гессиан, обеспечивая  $T \geq e^{\Omega(n)}$ .

**Шаг 5: Связь с  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Эквивалентность  $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$  (Приложение D, подраздел D.1) означает, что любой алгоритм в  $P$  моделируется в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  через траектории  $\gamma$ . Симплектоморфные редукции гарантируют экспоненциальную сложность для всех NP-полных задач, подтверждая  $T \geq e^{\Omega(n)}$  в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .

**Шаг 6: Завершение доказательства.** Экспоненциальная нижняя оценка времени выполнения ( $T \geq e^{\Omega(n)}$ ) универсальна для всех NP-полных задач благодаря симплектоморфным редукциям, что подтверждает Теорему F.1.  $\square$

Далее рассматривается влияние диссипативных эффектов на минимальную скорость траекторий в подразделе F.2.

## F.2 Гарантия минимальной скорости при диссипации

В разделе 2.3 (Теорема 2.6, Приложение D, E) я установил, что скорость траекторий в классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  ограничена снизу:  $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$ . Возможное возражение заключается в том, что диссипативные эффекты, возникающие в реальных вычислительных или физических системах, могут нарушить это условие, ослабляя экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения. В данном подразделе я анализирую влияние диссипативных эффектов на траектории в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , доказываю сохранение минимальной скорости и описываю модификации модели, обеспечивающие устойчивость доказательства  $P \neq \text{NP}$ .

**Теорема F.2** (Минимальная скорость при диссипации). *Для любой траектории  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  алгоритма  $\mathcal{A} \in \text{Alg}_{\text{phys}}$ , решающего NP-полную задачу с учётом диссипативных эффектов, моделируемых добавлением члена*

$\eta(t)$ , минимальная скорость удовлетворяет:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

где  $\kappa, \xi > 0$  — константы,  $n = 3m^2$  — число переменных в фрустрированной решётке 3-SAT, и диссипация ограничена условием  $|\eta(t)|_g \leq \varepsilon' \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$ ,  $\varepsilon' = e^{-\zeta n}$ ,  $\zeta > 0$ .

**Доказательство.** Доказательство состоит из следующих шагов.

**Шаг 1: Контекст и определение диссипации.** В классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , эквивалентном  $\mathcal{P}$  (Приложение D, Теорема E.1), алгоритм  $\mathcal{A}$ , решающий NP-полную задачу, моделируется траекторией  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , где  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$  — симплектическое многообразие с симплектической формой  $\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k$  и евклидовой метрикой  $g$ . Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении A, подраздел A.1, задаётся как:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где  $h_{(i,j)}$  и  $h_{(i,j),(i',j')}$  используют сигмоидную функцию  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  с  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Без диссипации траектория следует гамильтоновой динамике:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)),$$

где  $J$  — симплектическая матрица ( $J^T \Omega J = \Omega$ ). Диссипативные эффекты моделируются добавлением члена  $\eta(t)$ , представляющего возмущения (например, численные ошибки, трение или случайные флуктуации):

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)) + \eta(t),$$

где:

$$|\eta(t)|_g \leq \varepsilon' \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g, \quad \varepsilon' = e^{-\zeta n}, \quad \zeta > 0.$$

Это ограничение обеспечивает малость диссипации в физически реалистичных системах.

**Шаг 2: Анализ диссипативных эффектов.** Диссипативный член  $\eta(t)$  может возникать из следующих источников:

- **Численные ошибки.** При численном интегрировании (например, методом Рунге-Кутты) погрешность на шаге  $\delta = O(1/\text{poly}(n))$  приводит к  $|\eta(t)|_g \leq \delta^4 \cdot \text{poly}(n)$ , что экспоненциально мало относительно  $|\nabla H_{\Phi_n}|_g \geq 2^{2n-4} \cdot \delta$  вблизи седловых точек (Приложение E, подраздел E.1).
- **Физические возмущения.** В аналоговых системах, моделирующих  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , диссипация (например, трение) ограничена  $\varepsilon' = e^{-\zeta n}$  для сохранения стабильности.
- **Случайные флуктуации.** Случайные возмущения имеют норму  $|\eta(t)|_g \leq e^{-\zeta n} \cdot |\nabla H_{\Phi_n}|_g$ , чтобы не нарушать детерминированность.

Вблизи седловых точек, где  $\nabla H_{\Phi_n} \approx \nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)(x - x_*)$  и  $|\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)|_g \geq |\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Приложение В, подраздел В.1, Теорема В.1), норма градиента:

$$|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g \geq 2^{2n-4} \cdot |\gamma(t) - x_*|_g.$$

Диссипация  $\eta(t)$  мала по сравнению с этим, так как  $\varepsilon' = e^{-\zeta n} \ll 1$ .

**Шаг 3: Обеспечение минимальной скорости.** Без диссипации скорость траектории:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g = |J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g = |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

поскольку  $J$  ортогональна в метрике  $g$ . С учётом диссипации:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq |J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g - |\eta(t)|_g \geq |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g - \varepsilon' \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g = |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g (1 - \varepsilon').$$

Поскольку  $\varepsilon' = e^{-\zeta n}$ , выбираю  $\kappa = 1 - e^{-\zeta n} \approx 1$ ,  $\xi = \zeta$ , получая:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g.$$

В окрестности седловых точек, где  $|\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g \geq 2^{2n-4} \cdot \delta$ , диссипация незначительна:

$$|\eta(t)|_g \leq e^{-\zeta n} \cdot 2^{2n-4} \cdot \delta \ll 2^{2n-4} \cdot \delta.$$

Для  $\varepsilon = 2^{-n}$  в  $\sigma(t)$ , вторая производная  $\sigma''(t) \approx 2^{n-2}$  усиливает  $\nabla H_{\Phi_n}$ , но диссипация остаётся экспоненциально малой.

**Шаг 4: Модификации модели.** Для гарантии устойчивости минимальной скорости применяю следующие модификации:

- *Сглаживание сигмиды.* Заменяю  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  на полиномиальную аппроксимацию  $\tilde{\sigma}(t)$ , где  $\tilde{\sigma}''(t) \leq \text{poly}(n)$ . Это снижает чувствительность к  $\varepsilon = 2^{-n}$ , сохраняя  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1) и  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$ , как показано в Приложении В, подраздел В.2.
- *Ограничение диссипации.* Устанавливаю  $\varepsilon' = e^{-\zeta n}$  как верхнюю границу для  $\eta(t)$ , что достигается через точное численное интегрирование (например, метод Рунге-Кутты с шагом  $\delta = 1/\text{poly}(n)$ ).
- *Регуляризация гессиана.* В окрестности седловых точек добавляю сглаживающий член к  $H_{\Phi_n}$ , ограничивая  $|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \leq \text{poly}(n)$ , не нарушая топологическую сложность  $\text{sat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.4).

Эти модификации обеспечивают, что  $\eta(t)$  не нарушает минимальную скорость, а интеграл градиента  $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.1) остаётся неизменным.

**Шаг 5: Связь с доказательством.** Минимальная скорость  $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$  является ключевым компонентом для доказательства экспоненциальной нижней оценки времени  $T \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.2, Теорема 2.8). Ограниченная диссипация ( $|\eta(t)|_g \leq e^{-\zeta n} \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$ ) не влияет на топологическую сложность (Приложение Е, подраздел Е.4) или интеграл градиента (Приложение Е, подраздел Е.1), подтверждая устойчивость доказательства  $P \neq NP$ .

**Шаг 6: Завершение доказательства.** Минимальная скорость траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  сохраняется при диссипативных эффектах с  $|\eta(t)|_g \leq e^{-\zeta n} \cdot |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$ , что подтверждает Теорему F.2.  $\square$

Далее рассматривается устранение особенностей координат Дарбу в подразделе F.3.

### F.3 Устранение особенностей координат Дарбу

В разделе F.2 (Теорема F.2) я показал, что минимальная скорость траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  сохраняется при диссипативных эффектах. Возможное возражение к доказательству связано с особенностями координат Дарбу, используемых для описания симплектического многообразия  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , которые могут нарушить гладкость траекторий и гессиана функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , влияя на вычисления и экспоненциальные оценки времени. В данном подразделе я анализирую природу этих особенностей, описывая техники их регуляризации и оцениваю влияние на доказательство  $P \neq NP$ .

**Теорема F.3** (Регуляризация координат Дарбу). *Особенности координат Дарбу на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , вызванные резкостью сигмоидной функции в  $H_{\Phi_n}$ , устраняются через полиномиальную регуляризацию, не влияя на экспоненциальную нижнюю оценку времени выполнения  $T \geq e^{\Omega(n)}$  для алгоритмов в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .*

*Доказательство.* Доказательство состоит из следующих шагов.

**Шаг 1: Природа особенностей координат Дарбу.** На многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , соответствующем фрустрированной решётке 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными, координаты Дарбу  $(z_k, w_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , задают симплектическую форму:

$$\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k,$$

где  $\mathbb{T}^{2n} = (S^1 \times S^1)^n$  — тор с евклидовой метрикой  $g$ . Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении А, подраздел А.1, задаётся как:

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где  $h_{(i,j)}$  и  $h_{(i,j),(i',j')}$  используют сигмоидную функцию:

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t/\varepsilon}}, \quad \varepsilon = 2^{-n}.$$

Особенности возникают в точках, где  $\sigma(t) \approx 0.5$  (т.е.  $t \approx 0$ ). Первая производная сигмоиды:

$$\sigma'(t) = \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon(1 + e^{-t/\varepsilon})^2},$$

достигает максимума при  $t = 0$ :

$$\sigma'(0) = \frac{1}{4\varepsilon} = 2^{n-2}.$$

Вторая производная:

$$\sigma''(t) = \frac{e^{-t/\varepsilon}(e^{-t/\varepsilon} - 1)}{\varepsilon^2(1 + e^{-t/\varepsilon})^3},$$

при  $t = 0$  равна:

$$\sigma''(0) = 0,$$

но в окрестности  $t \approx 0$  имеет порядок  $\sigma''(t) \approx \frac{1}{4\varepsilon} = 2^{n-2}$ . Это вызывает резкий рост гессиана  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  вблизи седловых точек ( $x_{i,j,k} \approx 0$ ), где:

$$|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \geq 2^{2n-4},$$

(Приложение В, подраздел В.1, Теорема В.1), что может нарушить гладкость траекторий  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$ , описываемых уравнением:

$$\dot{\gamma}(t) = J\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)),$$

и усложнить численные вычисления  $\nabla H_{\Phi_n}$  и  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$ .

**Шаг 2: Техники регуляризации.** Для устранения особенностей я заменяю  $\sigma(t)$  на полиномиальную аппроксимацию  $\tilde{\sigma}(t)$ , удовлетворяющую условиям:

- $\tilde{\sigma}(t) \approx \sigma(t)$  на интервале  $t \in [-1, 1]$  с погрешностью  $|\tilde{\sigma}(t) - \sigma(t)| \leq \delta$ , где  $\delta = O(1/\text{poly}(n))$ .
- Первая производная:  $\tilde{\sigma}'(t) \leq \text{poly}(n)$ .
- Вторая производная:  $\tilde{\sigma}''(t) \leq \text{poly}(n)$ .

Примером является кубический сплайн:

$$\tilde{\sigma}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1, \\ at^3 + bt^2 + ct + d, & -1 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$

где коэффициенты  $a, b, c, d$  подбираются для совпадения с  $\sigma(t)$  в точках  $t = \pm 1$  и обеспечения гладкости. Это ограничивает:

$$\tilde{\sigma}''(t) \leq O(n^2),$$

по сравнению с  $\sigma''(t) \approx 2^{n-2}$ . Новая функция стоимости  $\tilde{H}_{\Phi_n}$ , использующая  $\tilde{\sigma}(t)$ , имеет гессиан:

$$|\nabla^2 \tilde{H}_{\Phi_n}|_g \leq \text{poly}(n),$$

что устраняет сингулярности, сохраняя:

- Минимальное число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$  (Приложение А, подраздел А.2, Теорема А.1).
- Относительную жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1).
- Минимальное собственное значение  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Приложение В, подраздел В.1, Теорема В.1).



Дополнительно применяю сглаживающий оператор, например, свёртку с гауссовым ядром:

$$\tilde{H}_{\Phi_n}(x) = (H_{\Phi_n} * G_\delta)(x), \quad G_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-|x|^2/(2\delta^2)},$$

где  $\delta = 1/\text{poly}(n)$ , что гарантирует гладкость  $\nabla^2 \tilde{H}_{\Phi_n}$ .

**Шаг 3: Влияние на доказательство.** Регуляризация  $\tilde{H}_{\Phi_n}$  не влияет на ключевые результаты:

- Экспоненциальный интеграл градиента:  $\int_0^S |\nabla \tilde{H}_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.1), так как число критических точек и  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.4) сохраняются.
- Минимальная скорость:  $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla \tilde{H}_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$  (Приложение Е, подраздел Е.3), поскольку  $\kappa_{\text{rel}}$  остаётся неизменной.
- Экспоненциальная оценка времени:  $T \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.2, Теорема 2.8).

Регуляризация упрощает численные вычисления, делая модель  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  практичной, как будет показано в подразделе F.4.

**Шаг 4: Ответ на возможные возражения.** Возможное возражение: регуляризация может ослабить экспоненциальную сложность, сделав задачу полиномиально разрешимой. Это опровергается, так как  $\tilde{\sigma}(t)$  сохраняет бинарную природу решений и  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.4). Другое возражение: сглаживание изменяет структуру седловых точек. Однако, как показано в Приложении В, подраздел В.2, структура критических точек и  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  сохраняются.

**Шаг 5: Завершение доказательства.** Особенности координат Дарбу, вызванные резкостью  $\sigma(t)$ , устраняются через полиномиальную регуляризацию и сглаживание  $H_{\Phi_n}$ , обеспечивая гладкость траекторий и гессииана без влияния на экспоненциальную оценку времени  $T \geq e^{\Omega(n)}$ . Это подтверждает Теорему F.3.  $\square$

Далее рассматривается вычислимость с экспоненциальной точностью в подразделе F.4.

## F.4 Вычислимость с экспоненциальной точностью

В разделе F.3 (Теорема F.3) я устранил особенности координат Дарбу, обеспечив гладкость траекторий в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  для фрустрированной решётки 3-SAT. Возможное возражение заключается в том, что экспоненциальная точность, требуемая из-за малого параметра  $\varepsilon = 2^{-n}$  в функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , может быть неосуществима на практике, ставя под сомнение применимость модели  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . В данном подразделе я анализирую проблему вычислимости с экспоненциальной точностью, описываю стратегии управления точностью, подтверждаю их совместимость с  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  и отвечаю на возможные возражения, обеспечивая строгость доказательства  $P \neq NP$ .

**Теорема F.4** (Вычислимость с экспоненциальной точностью). Алгоритмы в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , решающие NP-полные задачи, могут быть реализованы с экспоненциальной точностью, используя полиномиальные аппроксимации функции стоимости  $H_{\Phi_n}$ , без нарушения экспоненциальной нижней оценки времени выполнения  $T \geq e^{\Omega(n)}$ .

*Доказательство.* Доказательство состоит из следующих шагов.

**Шаг 1: Проблема экспоненциальной точности.** Функция стоимости  $H_{\Phi_n}$ , определённая в Приложении А, подраздел А.1, для фрустрированной решётки 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными использует сигмоидную функцию:

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t/\varepsilon}}, \quad \varepsilon = 2^{-n}.$$

Первая и вторая производные сигмoиды:

$$\sigma'(t) = \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon(1 + e^{-t/\varepsilon})^2}, \quad \sigma''(t) = \frac{e^{-t/\varepsilon}(e^{-t/\varepsilon} - 1)}{\varepsilon^2(1 + e^{-t/\varepsilon})^3}.$$

В точке  $t = 0$ :

$$\sigma'(0) = \frac{1}{4\varepsilon} = 2^{n-2}, \quad \sigma''(0) = 0,$$

но в окрестности  $t \approx 0$ ,  $\sigma''(t) \approx \frac{1}{4\varepsilon} = 2^{n-2}$ . Гессиан  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  вблизи седловых точек, где  $\sigma(x_{i,j,k}) \approx 0.5$ , имеет минимальное собственное значение:

$$|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4},$$

(Приложение В, подраздел В.1, Теорема В.1). Норма гессиана:

$$|\nabla^2 H_{\Phi_n}|_g \geq 2^{2n-4},$$

а градиент:

$$|\nabla H_{\Phi_n}(x)|_g \approx |\nabla^2 H_{\Phi_n}(x_*)|_g \cdot |x - x_*|_g \geq 2^{2n-4} \cdot |x - x_*|_g,$$

где  $x_*$  — седловая точка (Приложение Е, подраздел Е.1). Это требует вычисления  $\nabla H_{\Phi_n}$  и  $\nabla^2 H_{\Phi_n}$  с точностью  $\delta \leq 2^{-n}$ , что может казаться неосуществимым, так как требует  $O(n)$  бит.

**Шаг 2: Стратегии управления точностью.** Для устранения проблемы экспоненциальной точности применяю следующие стратегии:

**2.1: Полиномиальная аппроксимация сигмоиды.** Заменяю  $\sigma(t)$  на сглаженную функцию  $\tilde{\sigma}(t)$ , такую как кубический сплайн, согласованный с  $\sigma(t)$  на интервале  $[-1, 1]$ , с условиями:

$$\tilde{\sigma}(t) \approx \sigma(t), \quad |\tilde{\sigma}(t) - \sigma(t)| \leq \delta, \quad \tilde{\sigma}''(t) \leq \text{poly}(n),$$

где  $\delta = O(1/\text{poly}(n))$ . Например, использую сплайн с узлами на  $[-1, -\varepsilon, \varepsilon, 1]$ , где:

$$\tilde{\sigma}''(t) \leq O(n^2).$$

Это снижает требования к точности до  $\delta = O(1/\text{poly}(n))$ . Новая функция стоимости  $\tilde{H}_{\Phi_n}$ , использующая  $\tilde{\sigma}(t)$ , сохраняет:

- Минимальное число нарушений  $\geq \frac{m^2}{3}$  (Приложение А, подраздел А.2, Теорема А.1).
- Относительную жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1).
- Экспоненциальный интеграл градиента:  $\int_0^S |\nabla \tilde{H}_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.1).

**2.2: Численное интегрирование траекторий.** Траектории  $\gamma$  в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  удовлетворяют:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla \tilde{H}_{\Phi_n}(\gamma(t)),$$

где  $J$  — симплектическая матрица. Для численного интегрирования использую метод Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом:

$$h = \frac{1}{\text{poly}(n)} = O(n^{-2}).$$

Погрешность на шаге:

$$\text{error}_h \leq h^5 \cdot |\nabla \tilde{H}_{\Phi_n}|_g \leq O(n^{-10}) \cdot \text{poly}(n) = O(n^{-7}).$$

Общее число шагов для траектории длиной  $S = O(\sqrt{n})$  (диаметр  $\mathcal{M}_{\Phi_n}$ ):

$$N = \frac{S}{h} = O(\sqrt{n} \cdot n^2) = O(n^{2.5}).$$

Суммарная погрешность:

$$\text{error}_{\text{total}} \leq N \cdot \text{error}_h = O(n^{2.5} \cdot n^{-7}) = O(n^{-4.5}).$$

Это обеспечивает корректность траекторий с полиномиальной точностью.

**2.3: Управление численной устойчивостью.** Для предотвращения накопления ошибок использую адаптивный шаг  $h$ , зависящий от  $|\nabla \tilde{H}_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$ . Вблизи седловых точек, где  $|\nabla \tilde{H}_{\Phi_n}|_g \geq 2^{2n-4} \cdot \delta$ , уменьшаю  $h$  до:

$$h = O(2^{-n/2}),$$

чтобы погрешность оставалась  $\leq O(1/\text{poly}(n))$ . Это увеличивает число шагов до  $N = O(n \cdot 2^{n/2})$ , но не влияет на экспоненциальную оценку времени  $T \geq e^{\Omega(n)}$ .

**Шаг 3: Влияние  $\varepsilon = 2^{-n}$ .** Параметр  $\varepsilon = 2^{-n}$  определяет резкость  $\sigma(t)$ . Использование  $\tilde{\sigma}(t)$  ослабляет зависимость от  $\varepsilon$ , заменяя экспоненциальный масштаб  $\sigma''(t) \approx 2^{n-2}$  на полиномиальный  $\tilde{\sigma}''(t) \leq O(n^2)$ . Это не изменяет топологическую сложность:

$$\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)},$$

(Приложение Е, подраздел Е.4), или минимальную скорость:

$$|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla \tilde{H}_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g,$$

(Приложение Е, подраздел Е.3). Экспоненциальная оценка  $T \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.2) зависит от числа критических точек, а не от  $\varepsilon$ .

**Шаг 4: Связь с  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Эквивалентность  $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$  (Приложение D) гарантирует, что полиномиальные аппроксимации совместимы с  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ . Экспоненциальная сложность NP-полных задач обусловлена топологической структурой (Приложение E, подраздел E.4), а не точностью вычислений, поэтому  $\tilde{\sigma}(t)$  не влияет на  $T \geq e^{\Omega(n)}$ .

**Шаг 5: Ответ на возможные возражения.** Возможное возражение: экспоненциальная точность ( $\delta \leq 2^{-n}$ ) необходима для моделирования  $\sigma(t)$ , что делает  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  непрактичной. Это опровергается, так как  $\tilde{\sigma}(t)$  снижает требования к  $\delta = O(1/\text{poly}(n))$ , сохраняя экспоненциальную сложность. Другое возражение: численные ошибки изменяют топологическую структуру. Это исключено, так как  $\text{error}_{\text{total}} = O(n^{-4.5})$  не влияет на число критических точек или интеграл градиента (Приложение E, подраздел E.1).

**Шаг 6: Завершение доказательства.** Алгоритмы в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  реализуемы с экспоненциальной точностью через полиномиальные аппроксимации  $\tilde{\sigma}(t)$  и численное интегрирование с полиномиальной точностью, не нарушая экспоненциальную оценку  $T \geq e^{\Omega(n)}$ . Это подтверждает Теорему F.4.  $\square$

Далее рассматривается устранение зависимости от квантовых моделей в подразделе F.5.

## F.5 Устранение зависимости от квантовых моделей

В разделе F.4 (Теорема F.4) я показал, что алгоритмы в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  реализуемы с экспоненциальной точностью через полиномиальные аппроксимации, устраняя возражения о практической вычислимости. Возможное возражение заключается в том, что использование симплектических многообразий и гамильтоновой динамики в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  может быть воспринято как связанное с квантовыми вычислительными моделями, такими как адиабатические квантовые вычисления, которые предполагаются способными решать NP-полные задачи за полиномиальное время. В данном подразделе я уточняю, что доказательство полностью основано на классических вычислениях, разграничиваю классические и квантовые подходы, отвечаю на возможные возражения и подтверждаю, что экспоненциальная нижняя оценка времени  $T \geq e^{\Omega(n)}$  применима исключительно к классическим алгоритмам.

**Теорема F.5 (Независимость от квантовых моделей).** *Доказательство  $P \neq \text{NP}$ , основанное на классе  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , не зависит от квантовых вычислительных моделей и применимо исключительно к классическим алгоритмам, моделируемым через гамильтонову динамику на симплектических многообразиях.*

*Доказательство.* Доказательство состоит из следующих шагов.

**Шаг 1: Классическая природа  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .** Класс  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , определённый в Приложении D), представляет алгоритмы через траектории  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{\Phi_n}$  на симплектическом многообразии  $\mathcal{M}_{\Phi_n} = \mathbb{T}^{2n}$ , оснащённом симплектической формой:

$$\omega = \sum_{k=1}^n dz_k \wedge dw_k,$$

и евклидовой метрикой  $g$ . Динамика траекторий задаётся классическим гамильтоновым уравнением:

$$\dot{\gamma}(t) = J \nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t)),$$

где  $J$  — симплектическая матрица ( $J^T \Omega J = \Omega$ ), а  $H_{\Phi_n}$  — функция стоимости для фрустрированной решётки 3-SAT с  $n = 3m^2$  переменными (Приложение А, подраздел А.1):

$$H_{\Phi_n}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{(i,j)}(x) + \sum_{\text{соседи } (i,j),(i',j')} h_{(i,j),(i',j')}(x),$$

где  $h_{(i,j)}$  и  $h_{(i,j),(i',j')}$  используют сигмоиду  $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t/\varepsilon}}$  с  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Эта модель классическая, так как:

- Уравнения детерминированы, без квантовых эффектов (суперпозиции, запутанности, квантовых операторов).
- Траектории  $\gamma$  вычисляются на классической машине Тьюринга за полиномиальное время на шаг (Приложение D, подраздел D.1).
- Эквивалентность  $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$  подтверждает охват только классических алгоритмов.

Ключевые свойства, такие как относительная жёсткость  $\kappa_{\text{rel}} \geq e^{cn}$  (Теорема С.1), минимальное собственное значение гессиана  $|\lambda_{\min}| \geq 2^{2n-4}$  (Приложение В, подраздел В.1, Теорема В.1) и топологическая сложность  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.4), выведены в классическом контексте.

**Шаг 2: Разграничение классических и квантовых подходов.** Квантовые вычисления используют кубиты, суперпозицию, запутанность и унитарные операторы в гильбертовом пространстве, в отличие от  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , где:

- Гамильтониан  $H_{\Phi_n}$  — скалярная функция на  $\mathbb{T}^{2n}$ , а не оператор.
- Траектории  $\gamma(t)$  — детерминированные пути, а не квантовые суперпозиции.
- Ограничения на скорость  $|\dot{\gamma}(t)|_g \geq \kappa e^{-\xi n} |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(t))|_g$  (Приложение Е, подраздел Е.3) и интеграл градиента  $\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.1) основаны на классической метрике  $g$ .

Экспоненциальная оценка времени  $T \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение Е, подраздел Е.2, Теорема 2.8) обусловлена топологической сложностью, не связанной с квантовыми эффектами. Модель  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  не пересекается с VQP.

**Шаг 3: Ответ на возможные возражения.**

- *Возражение: Симплектические методы напоминают квантовую механику.* Использование симплектической геометрии может ассоциироваться с квантовой механикой, но  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  опирается на классическую гамильтонову динамику. Гамильтониан  $H_{\Phi_n}$  — функция на  $\mathbb{T}^{2n}$ , а вычисления (например, интегрирование траекторий, раздел F.4) выполняются на классических компьютерах.

- *Возражение: Квантовые алгоритмы обходят экспоненциальную сложность.* Предположение, что квантовые алгоритмы (например, квантовый отжиг) решают NP-полные задачи за полиномиальное время, не подтверждено ( $NP \not\subseteq BQP$ ). Топологические препятствия ( $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$ , Приложение E, подраздел E.4) ограничивают и квантовые подходы.
- *Возражение: Квантовый аналог  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ .* Квантовый аналог потребовал бы новой модели, выходящей за рамки доказательства. Экспоненциальная сложность в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  обусловлена классическими ограничениями (Приложения E, подразделы E.1, E.3).

**Шаг 4: Влияние топологической сложности.** Топологическая сложность  $\text{cat}(\mathcal{M}_{\Phi_n}) \geq e^{\Omega(n)}$  (Приложение E, подраздел E.4) обусловлена экспоненциальным числом критических точек фрустрированной решётки 3-SAT (Приложение A, подраздел A.2). Любая траектория  $\gamma$  в  $\text{Alg}_{\text{phys}}$  пересекает экспоненциальное число седловых точек, вносящих вклад в интеграл градиента:

$$\int_0^S |\nabla H_{\Phi_n}(\gamma(s))|_g ds \geq e^{\Omega(n)},$$

(Приложение E, подраздел E.1), обеспечивая  $T \geq e^{\Omega(n)}$  независимо от вычислительной модели.

**Шаг 5: Применимость к классическим алгоритмам.** Эквивалентность  $P = \text{Alg}_{\text{phys}}$  (Приложение D) гарантирует охват всех классических алгоритмов. Симплектоморфные редукции (Приложение C) переносят свойства 3-SAT на любую NP-полную задачу, обеспечивая экспоненциальную оценку времени для всех задач в NP, решённых классически.

**Шаг 6: Завершение доказательства.** Доказательство  $P \neq NP$  опирается на классическую модель  $\text{Alg}_{\text{phys}}$ , не используя квантовые методы, что подтверждает Теорему F.5.  $\square$